Г. ШОКЕ

ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

GUSTAVE CHOQUET

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMETRIE

HERMANN
Paris 1964

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

Популярная серия

Г. Шоке

Геометрия

Перевод с французского
Н. Н. Родман

Под редакцией И. М. Яглома

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1970

У. Д. К. 513.0

Книга видного французского математика и педагога содержит своеобразное изложение элементарной геометрии, основанное на разработанной автором системе аксиом, весьма далекой от классической. Близкая к наглядной очевидности аксиоматика Шоке отличается тем, что основные геометрические факты получаются в ней легко и естественно. За рубежом книга Шоке получила широкое признание как одна из наиболее продуманных попыток перестройки школьного курса геометрии.

Книгу с интересом прочтут читатели разных категорий, начиная от учащихся старших классов школ с математической специализацией. Она будет, несомненно, полезна учителям математики и студентам педагогических институтов.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
29-70

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

«Математическая экспансия» последних десятилетий — бурное вторжение математики в самые различные области знания, — привела к осознанию необходимости усиления математической подготовки школьников, что вызвало к жизни широкое международное движение за модернизацию учебных планов и программ и период серьезных реформ, затрагивающих интересы огромного количества людей: учащихся и родителей учащихся, учителей и воспитателей учителей. При этом, если общее направление преобразования курса алгебры средней школы является в общих чертах достаточно ясным (хотя и тут возникло много разнообразных и зачастую неожиданных точек зрения, представление о которых может дать, например, экстремистская платформа Папи [44][1])), то пути перестройки школьного курса геометрии по сей день остаются куда более неясными.

Сегодня, кажется, уже почти все согласны с тем, что традиционная система Евклида [1], в русской учебной литературе наиболее последовательно проведенная в созданных еще в прошлом веке учебниках Киселева [49], не заслуживает сохранения: ведь ни в науке, ни в практической жизни выпускнику средней школы далее не придется иметь дело с многими теоремами сложившегося курса геометрии и с типичными для этого курса методами рассуждений. Но чем следует заменить эту систему? По этому последнему

---

[1]) Цифры в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы на стр. 221—224. (По поводу «платформы Папи» см., например, рецензию на т. I книги [44] — «Математика в школе», 1965, № 4, стр. 81—89.)

поводу сегодня высказываются самые разные мнения, причем спектр предложений и проектов отличается редкой широтой: от категорических возражений против преподавания геометрии в старших классах средней школы вообще до попыток включения в программу средней школы чуть ли не всей аксиоматики Гильберта [2] (см., например, учебник [44]) и от предложений возрождения в школе изощренной «проективной техники» Я. Штейнера и немецких геометров XIX века до вариантов последовательного построения курса геометрии на базе алгебраической теории групп и исчисления симметрий (см. [34]).

Однако в общем достаточно нестройном хоре экспертов по вопросам преподавания геометрии в средней школе можно отметить несколько голосов, бесспорно заслуживающих того, чтобы прислушаться к ним внимательнее.

Исторически первое серьезное предложение о перестройке школьного курса геометрии принадлежит известному американскому математику Джорджу Биркгофу [8]. Написанный одновременно со статьей [8] школьный учебник [9], составленный Биркгофом в сотрудничестве с методистом Р. Битли, вышел в свет первым изданием еще в 1933 г. и затем неоднократно переиздавался. Этот учебник оказал весьма серьезное влияние на всю последующую деятельность американских ученых и методистов: так, например, авторы всех учебников [13]—[17] придерживаются сходной системы изложения [1]). Основная идея Дж. Биркгофа заключалась в последовательно проводимом взгляде на прямую как на точечное множество, а также в известной алгебраизации геометрии, связанной с отождествлением точек прямой с вещественными числами, что снимает все трудности, с которыми столкнулся Д. Гильберт [2] в своих попытках строгого описания понятия порядка (точек на пря-

---

[1]) Свидетельством неиссякающего интереса американских геометров и педагогов к этим идеям может служить недавняя статья [18], посвященная выводу из аксиоматики Биркгофа некоторых тонких фактов элементарной геометрии, имеющих, по существу, топологический характер.

мой). Близкой системы изложения придерживается и советский геометр А. В. Погорелов, автор недавно изданных учебников [50] элементарной геометрии. А. В. Погорелов, подобно Дж. Биркгофу, выдвигает на передний план понятие расстояния между точками, что сразу вводит в геометрию понятие числа; однако в ряде пунктов он отклоняется от принятой американскими авторами схемы, достигая большей геометричности, чем они.

Следующим серьезным шагом в области методики геометрии, причем шагом, еще дальше идущим по пути алгебраизации основ геометрии, следует считать книгу, предлагаемую ныне вниманию русского читателя. Ее автором является видный французский математик, профессор Парижского университета (Сорбонны) Густав Шоке. Эта книга, которой предшествовал ряд других публикаций Г. Шоке на ту же тему [1]), порождена «векторной» аксиоматикой геометрии, впервые предложенной еще в 1917 г. одним из крупнейших математиков XX века Германом Вейлем [2]). Правда, Шоке не решается прямо положить в основу предлагаемой им системы изложения аксиоматику Вейля, достаточно далекую от всех школьных традиций, и проявляет немало остроумия в стремлении как-то адаптировать схему Вейля, приблизив ее к школьной практике. Однако близость излагаемой в этой книге системы построения геометрии к широко известному всем математикам (но не педагогам!) векторному пути обоснования геометрии очевидна и переход от аксиоматики Шоке к аксиоматике Вейля никаких затруднений не составляет.

Укажем также, что настоящая книга не является последней в ряду сочинений, ставящих своей целью сближение геометрии и алгебры. В том же 1964 г., в каком вышел в свет французский оригинал настоящей книги, и в той же серии «Преподавание наук» («Enseignement des Sciences») парижского издатель-

---

[1]) См., например, ранее переведенную на русский язык статью [24].

[2]) См., например, [30], кн. IV, стр. 369—380 или статью [58].

ства Hermann появилась книга одного из авторитетнейших французских математиков Жана Дьедонне «Линейная алгебра и элементарная геометрия» [29]; эта книга, в значительной степени инспирированная предшествующими ей работами Г. Шоке, вся посвящена утверждению следующей методической идеи: *линейная алгебра — это и есть элементарная геометрия* (и никакой иной элементарной геометрии нет и быть не должно!). Свои взгляды Ж. Дьедонне отстаивает с характерной для всех полемических выступлений этого автора страстностью; однако учителю средней школы, вероятно, придется более по вкусу сдержанность Шоке, чем пафос Дьедонне. В последние годы появились и некоторые рассчитанные непосредственно на использование в школе реализации методических идей Дьедонне, из числа которых наибольшего внимания заслуживают обстоятельные «геометрические» тома «Современной математики» Ж. Папи [44]: т. 2, Действительные числа и векторная плоскость (442 стр.); т. 3, Вот Евклид (452 стр.); т. 6, Планиметрия (277 стр.; этот том посвящен Ж. Дьедонне).

Скажем еще несколько слов о лежащей перед Вами книге. Ее направленность и круг возможных читателей достаточно подробно раскрывает сам автор в предисловии и во введении; здесь мне хочется лишь отметить близость многих идей Шоке к методическим поискам, ведущимся в нашей стране (ср., например, п. 96 этой книги с содержанием § 52 нового учебника [51]). Заметим еще, что книга Г. Шоке предполагает у читателя некоторую математическую культуру, выражающуюся, в частности, во владении рядом символов и терминов, давно уже завоевавших права гражданства во французской учебной и методической литературе, но недостаточно знакомых нашим учащимся и преподавателям; для того чтобы сделать эту книгу возможно более доступной широкому кругу читателей, к ней приложены составленные редактором русского издания словарь математических терминов и список обозначений. Немногочисленные подстрочные примечания редактора обозначены звездочками в отличие от нумерованных сносок автора. Редактор также присоединил к авторскому списку литературы два последних раздела V и VI и добавил ряд наименований в других разделах; номера прибавленных книг и статей отмечены звездочками. При этом и в настоящем своем виде список литературы, дающий некоторое представление о современных поисках в области преподавания геометрии, имеет чисто иллюстративное значение и не претендует ни на какую полноту.

И. М. Яглом

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана для преподавателей математики средних школ, для тех, кто готовится к этой деятельности, и для всех тех, кто любит геометрию. Ее могут с пользой для себя прочитать под руководством учителя учащиеся старших классов средней школы.

Евклид положил в основу своей геометрии на плоскости признаки равенства треугольников. Двадцать три века спустя математики определяют плоскость как аффинное пространство размерности 2 с заданным в нем скалярным произведением. Я полагал, что нашим детям понадобится изложение геометрии, которое, как и изложение Евклида, исходит из наглядных представлений, но которое даст им возможность очень быстро перейти к использованию гибких и плодотворных методов алгебры.

Эта книга содержит, таким образом, аксиоматику геометрии, основанную на понятиях параллельности, перпендикулярности и расстояния, но в таком виде, который позволяет естественным образом быстро перейти к алгебраической структуре плоскости и пространства.

В связи с этим многие главы посвящены разъяснению вопросов, которые часто считают каверзными: движений, углов и их измерения, ориентации.

Написанию этой книги немало способствовали дискуссии со многими математиками и преподавателями, как французскими, так и зарубежными. Особую благодарность я приношу Андре Ревузу, критика и предложения которого мне были чрезвычайно полезны.

Густав Шоке

ВВЕДЕНИЕ

Здесь не будет обсуждаться необходимость преподавания геометрии *), предметом нашего исследования будет лишь способ ее преподавания.

В настоящее время в разных странах существует более или менее единое мнение по следующим двум основным вопросам:

1. Преподавание геометрии в младших классах школы не может основываться на дедукции. Оно должно быть основано на наблюдении; его целью является выработка фундаментальных понятий, базирующихся на опыте.

2. Самый элегантный, глубокий и быстрый способ определения плоскости (или пространства) для математика — это определение ее как двумерного (трехмерного) векторного пространства над R, снабженного скалярным произведением, т. е. симметричной билинейной формой $u \cdot v$, такой, что $u \cdot u > 0$ для любого вектора $u \neq 0$. Кроме того, именно это определение наилучшим образом подготовлено для плодотворных обобщений (пространства R^n, C^n, гильбертово пространство и т. д.).

По свидетельству многих преподавателей старших классов средней школы, из их опыта следует, что этим определением могут весьма эффективно пользоваться уже ученики выпускных классов (в возрасте 17 лет), овладевшие предварительно понятием скалярного произведения. Такой метод обеспечивает

*) В последние годы в разных странах мира неоднократно раздавались голоса, предлагающие вовсе отказаться от преподавания геометрии в старших классах средней школы.

в этом классе значительную экономию мышления и совершенно естественно приводит к доказательствам, основанным на методах, представляющих реальный интерес. В то же время такая методика оказывает неоценимую помощь преподавателю физики, так как она позволяет наконец-то правильно ввести и изучить такие понятия, как работа, центр тяжести, равнодействующая сил.

Проблема становится менее простой, когда речь заходит о детях промежуточного возраста, скажем о подростках от 13 до 16 лет. В этом возрасте дети начинают понимать, что такое доказательство; у некоторых из них пробуждается настоящая жажда логики, показывающая, что пришло время всерьез приступить к дедуктивным рассуждениям. Следовательно, здесь надо выделить какие-то фрагменты, построенные дедуктивно с точным указанием предпосылок всех выводов.

Поэтому особенно важно, чтобы учитель, имеющий дело с учащимися этого возраста, владел приводимой ниже полной аксиоматикой геометрии. Кроме того, многочисленные эксперименты показали, что некоторые дети определенно обладают вкусом к строгой дедукции: математика кажется им игрой со строгими правилами, и им очень нравится играть в эту игру, соблюдая все ее правила. Следовательно, нам надо найти простую аксиоматику с аксиомами, которые были бы *сильными*, т. е. позволяющими очень быстро выводить неочевидные теоремы, и *интуитивно ясными*, т. е. представляющими свойства окружающего нас пространства в форме, которая допускает простую проверку.

То, что аксиомы при этом не будут *независимыми*, не столь существенно, хотя не хотелось бы исходить из слишком большого числа аксиом, как это предлагают некоторые преподаватели: математическая «игра» с очень большим числом правил становится сложной и утрачивает свою четкость и определенность.

Хорошо известно, что «аксиоматика» Евклида не отвечает больше нашим требованиям логической точности; то же самое можно сказать о лучших аксиоматиках, встречающихся в школьных учебниках, хотя в последних изданиях этих учебников заметны усилия, направленные на их совершенствование.

Известно, что Гильберт исключил лишние аксиомы из аксиоматики Евклида и добавил недостающие, превратив ее в логически удовлетворительную систему. Однако преподавание элементарной математики не было его основным занятием; разработка элементарных формальных понятий, основанная на его аксиоматике (см., например, «Рациональную геометрию» Хальстеда*)) также мало приспособлена для преподавания.

Аксиоматика Евклида — Гильберта основана на понятиях длины, угла, треугольника. При этом искусно скрывается векторная структура пространства, причем до такой степени, что многие века понятие вектора оставалось неизвестным. Тот факт, что треугольник есть «полупараллелограмм», нисколько не мешал в течение более чем двадцати веков уделять основное внимание доскональному изучению свойств высот, медиан, медиатрис**) и биссектрис треугольников, условиям равенства треугольников и метрическим соотношениям в треугольнике. В основе всей геометрии лежал треугольник, а не параллелограмм, который мог бы легко привести к понятию вектора.

Конечно, треугольник всегда сохранит за собой достойное место, полагающееся ему в силу того, что это простейший плоский многоугольник и что всякий треугольник определяет плоскость и притом только одну. Но надо решительно сдерживать развитие извращенного вкуса к изучению замечательных точек треугольника и подчас элегантных, но совершенно бесполезных его метрических свойств.

Мы должны отдать предпочтение методам, основанным на фундаментальных понятиях, выкристаллизовавшихся за двадцать веков развития

---

*) См. [3]; ср. также элементарный учебник [44].

**) То есть перпендикуляров, восстановленных к сторонам треугольника в их серединах.

математики: понятиях множества, отношений эквивалентности и порядка, алгебраических законах, векторном пространстве, симметрии и геометрических преобразованиях.

Эти методы не только позволяют на очень ранних стадиях использовать простые и эффективные средства алгебры, приведя таким образом к своеобразной экономии умственных усилий, но, предполагая обращение к фундаментальным понятиям, они, кроме того, разовьют мыслительные способности наших учеников и подготовят их тем самым к будущей работе.

Направляющая идея, ведущая к хорошей аксиоматике

Как построить систему, удовлетворяющую нашим требованиям? Хотелось бы, чтобы в этой системе было удобно выявить векторную структуру пространства, равно как и существование и свойства скалярного произведения. Следовательно, ситуацию можно резюмировать следующим образом: сегодня мы владеем простым «царским путем» в геометрию *), ведущим через понятия «векторного пространства» и «скалярного произведения»; однако этими понятиями нельзя «овладеть штурмом», без всякой подготовки, особенно в том возрасте, когда у ученика еще не совсем сформировалось понятие алгебраической операции. Тем не менее эти понятия будут служить нам путеводной нитью. Мы попытаемся, избегая излишеств, так одеть сам по себе совершенный, но слишком абстрактный для ребенка логический каркас, чтобы он превратился в нечто знакомое и приветливое.

Проанализируем кратко основные понятия:

а) Понятие векторного пространства существенно опирается на понятие с л о ж е н и я — как сложения точек прямой (чисел!), так и сложения векторов; это

*) Здесь имеется в виду известный исторический анекдот, согласно которому Евклид якобы ответил властителю Египта Птолемею, обратившемуся к нему с просьбой о скорейшем изложении основ геометрии: «В геометрию нет царского пути».

последнее сводится к понятию п а р а л л е л о г р а м м а, или к понятию с е р е д и н ы пары точек*).

b) Скалярное произведение векторов есть б и л и н е й н а я с и м м е т р и ч е с к а я функция; первое («билинейная») связано с особой ролью сложения; нельзя игнорировать также новое понятие — симметрию, без которой нам не обойтись.

c) Скалярное произведение п о л о ж и т е л ь н о (или положительно определенно) в том смысле, что $u \cdot u > 0$ для всех $u \neq 0$.

Таким образом, нам предстоит строить нашу аксиоматику на основе *аддитивной структуры* прямой, *параллельности* и *симметрии.*

Во всех учебниках элементарной геометрии используется понятие симметрии — никто не знает, как без нее обойтись, — но редко кто вводит это понятие в аксиоматику**); в результате строгая система аксиом остается неудовлетворительной, а ее авторы лишаются мощного оружия.

Многие преподаватели полагают, что понятие симметрии весьма сложно, и приучают своих учеников систематически пользоваться признаками равенства треугольников, даже в тех случаях, когда очевидная симметрия позволяет решить задачу очень быстро. С этой боязнью симметрии следует всячески бороться; с самого начала симметрии следует по заслугам отвести почетное место.

Нам остается отразить в нашей аксиоматике *положительность* скалярного произведения. Она предполагает упорядоченность поля скаляров, что выразится

---

*) Здесь имеется в виду существование двух определений суммы векторов $a = \overline{OA}$ и $b = \overline{OB}$.

1° $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC} \Leftrightarrow O, A, C, B$ — вершины параллелограмма (это определение не имеет смысла, если O, A, B — точки одной прямой; на этот случай оно распространяется по транзитивности);

2° $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC} \Leftrightarrow$ середины пар (A, B) и (O, C) совпадают; наряду с ними существует еще и т р е т ь е определение:

3° $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

**) Ср. с книгой Бахмана [20] (см., в частности, вступительную статью редактора русского перевода этой книги).

аксиомой порядка на множестве точек прямой. Но кроме того положительная определенность позволяет задать некоторую норму в пространстве и, следовательно, некоторое расстояние, удовлетворяющее неравенству треугольника. Быть может, нам придется ввести в состав аксиом это неравенство, если окажется, что другие аксиомы недостаточно сильны, чтобы обеспечить его.

Ниже будет построена некоторая аксиоматика, базирующаяся на указанных принципах. Метрические понятия в ней тщательно отделены от понятий аффинных; первых аксиом достаточно для полного изучения векторной структуры плоскости или пространства [1]).

По-видимому, аксиомы инцидентности I и аксиомы порядка II должны фигурировать во всякой разумной аксиоматике плоскости. Я прошу обратить внимание на аксиому инцидентности $\mathrm{I_b}$, которая утверждает, что через любую точку проходит прямая, параллельная данной прямой, и притом только одна. В постулате Евклида утверждается единственность параллельной; существование же ее может быть доказано с помощью других аксиом. Я полагаю, что объединение в одной аксиоме утверждений о существовании и единственности чрезвычайно упрощает построение геометрии и что, с другой стороны, очень немногие дети моложе 16 лет могут «почувствовать» доказательство существования, поскольку существование параллельных представляется им по крайней мере столь же экспериментально ясным, как и единственность.

Сначала я строю аксиоматику плоскости; несколько дополнительных аксиом позволят впоследствии очень просто определить аффинную и метрическую структуру пространства.

---

[1]) Впервые эта аксиоматика была представлена в 1959 г. на семинаре OECE в Руаомоне. В приложении я привожу набросок второй аксиоматики, в которой главная роль отводится метрическим свойствам плоскости и осевым симметриям.

Аксиоматика плоскости строится по следующей схеме: плоскость есть некоторое множество, определенные подмножества которого называются прямыми. На каждой прямой задана определенная структура порядка и некоторая алгебраическая структура. Для каждой прямой эти две структуры связаны между собой аксиомой совместимости. Кроме того, структуры различных прямых связаны между собой соответствующими аксиомами. Зато аксиомы инцидентности не связаны со структурой прямых: они просто уточняют степень «разреженности» прямых и пар параллельных. Мы увидим, что только из одних аксиом групп I и II можно вывести многие свойства, обычно считающиеся связанными с аффинной или метрической структурой плоскости.

Роль чисел в геометрии

Древние греки очень долго не знали о существовании каких-либо чисел, отличных от рациональных, и даже после их знаменитого открытия иррациональности числа $\sqrt{2}$ они не пришли к общему понятию числа: число всегда оставалось для них связанным с геометрией. Последователи Евклида, пытаясь довести до совершенства его творение, отточили «исчисление отрезков», которое позволяет, хотя и с большим трудом, выявить структуру поля на множестве чисел, исходя из геометрии плоскости *). Мы не должны никоим образом повторять эту ошибку. Как можно раньше ребенок должен получить представление о множестве R чисел как о линейно упорядоченном поле: другими словами, он должен осознать, что в процессе счета он из всех свойств сложения и умножения использует лишь небольшое число свойств, которые математики называют аксиомами линейно упорядоченного поля.

Позднее, если это потребуется, он воспользуется аксиомой Архимеда (например, в форме: «Для всякого числа существует мажорирующее его целое число»), или более сильной аксиомой непрерывности

*) Ср. Гильберт [2]; см., в частности, § 15 и след.

(например, в форме: «Всякое ограниченное подмножество множества R обладает наименьшей мажорантой»).

Конечно, изучение алгебраической структуры операций может быть проиллюстрировано на прямой; но при этом не должна затрагиваться геометрия плоскости. Следует совершенно исключить обращение к исчислению отрезков, использующему в применении к отрезкам прямых (числам) развернутые построения геометрии плоскости: параллельные, секущие, иногда даже перпендикуляры.

ГЛАВА I

АКСИОМЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ И АКСИОМЫ ПОРЯДКА

§ 1. ПРЯМЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ

1. Структура плоскости

Плоскость есть множество, обозначаемое через П, на котором определена некоторая структура путем задания системы $\mathscr{D}$ подмножеств множества П, называемых *прямыми*. На каждой прямой в свою очередь задана некоторая структура, которая точно определяется аксиомами; структуры различных прямых связаны между собой с помощью другой группы аксиом, которые можно назвать аксиомами перехода.

Для простоты изложения поставим первой следующую аксиому:

Аксиома 0. *Плоскость содержит по крайней мере две прямые, и каждая прямая содержит по крайней мере две точки.*

Мы приписали этой аксиоме номер 0, потому что ее можно будет вывести из аксиомы III_a, гласящей, что всякая прямая содержит по крайней мере две точки, и аксиомы IV_a, гласящей, что плоскость содержит по крайней мере две прямые. Таким образом, аксиома 0 есть следствие идущих за ней аксиом, но изложение выигрывает от того, что мы будем использовать ее с самого начала.

Для того чтобы нам было удобнее формулировать следующую аксиому, введем

Определение 1.1. Говорят, что две прямые A, B плоскости П *параллельны* (и пишут $A \| B$), если либо $A = B$, либо $A \cap B = \varnothing$.

Во многих учебниках параллельность определяется более узко условием $A \cap B = \emptyset$; это приводит к усложнению языка и затушевывает тот факт, что здесь имеет место отношение эквивалентности, с которым мы скоро столкнемся. Уже сейчас отметим, что, как следует из самого определения, параллельность есть симметричное и рефлексивное бинарное отношение на множестве $\mathscr{D}$ прямых.

Нам будет удобно пользоваться следующей терминологией:

Говорят, что две прямые *пересекаются*, если их пересечение в теоретико-множественном смысле содержит единственную точку.

Говорят, что прямая D *проходит* через точку a, если $a \in D$.

Говорят, что точки подмножества X множества Π *коллинеарны*, если существует прямая, содержащая X.

2. Аксиомы инцидентности

Аксиома $\mathrm{I_a}$. *Для любой пары (x, y) различных точек плоскости существует прямая, и притом единственная, содержащая эти точки.*

Аксиома $\mathrm{I_b}$. *Для любой прямой D и любой точки x существует прямая, и притом единственная, параллельная D и проходящая через x.*

Для всякой пары (x, y) различных точек плоскости Π будем обозначать прямую, проходящую через эти точки, символом $\Delta(x, y)$.

В соответствии с аксиомой $\mathrm{I_a}$ две прямые либо пересекаются, либо параллельны, но не то и другое вместе *).

Предложение 2.1. *Отношение параллельности есть отношение эквивалентности на $\mathscr{D}$.*

---

*) Две разные прямые не могут иметь *две* общие точки в силу аксиомы $\mathrm{I_a}$.

Действительно, как мы уже знаем, это отношение симметрично и рефлексивно; остается показать, что оно транзитивно. Пусть $A \| B$ и $B \| C$. Если $A \cap C = \emptyset$, то и $A \| C$; в противном случае A и C параллельны B и содержат общую точку — следовательно, $A = C$, откуда опять получаем, что $A \| C$.

Известно, что со всяким отношением эквивалентности R на некотором множестве E связано разбиение этого множества на классы эквивалентности, которые являются элементами некоторого нового множества, обозначаемого через E/R; воспользуемся этим для следующего определения.

Определение 2.2. Классы эквивалентности на множестве $\mathscr{D}$, порожденные отношением параллельности, называются *направлениями*; класс эквивалентности, которому принадлежит прямая D, называется *направлением прямой D*.

Тогда тот факт, что две прямые параллельны, можно выразить иначе, сказав, что они имеют одно и то же направление. Через всякую точку проходит некоторая прямая данного направления, и притом только одна.

На рисунках часто удобно указывать направление δ заданием одной из прямых направления δ.

Предложение 2.3. *Для всякой прямой D дополнение к D не пусто.*

Доказательство. Пусть D' — некоторая прямая, отличная от D. Если $D' \| D$, то дополнение к D содержит D'. Если D и D' пересекаются, то пусть a — их общая точка; тогда существует такая точка $x \in D'$, что $x \neq a$ (аксиома 0); при этом $x \notin D$.

Эти два случая исчерпывают доказательство предложения 2.3.

Предложение 2.4. *Пусть D — некоторая прямая, и пусть $a \notin D$* (следовательно, для всех $x \in D$ прямая $\Delta(a, x)$ определяется однозначно).

Отображение $x \to \Delta(a, x)$ множества D в множество $\mathcal{D}$ есть биективное отображение (биекция) множества D на множество прямых, проходящих через точку a и не параллельных прямой D.

Доказательство. Это отображение взаимно однозначно, потому что всякая прямая, проходящая через a, встречается в $\mathcal{D}$, и притом только один раз. С другой стороны, всякая прямая $\Delta(a, x)$ пересекается с D; и наоборот, всякая проходящая через a и пересекающаяся с D прямая пересекает ее в некоторой точке x и, следовательно, имеет вид $\Delta(a, x)$.

Следствие 2.5. *Существует по крайней мере три направления.*

Действительно (сохраним обозначения предложения 2.4), D содержит по крайней мере две точки; следовательно, через a проходят по крайней мере три прямые: прямая, параллельная D, и две прямые $\Delta(a, x)$ (где $x \in D$).

Предложение 2.6. *Пусть δ — произвольное направление и R — бинарное отношение на Π, определяемое условием:*

$$(x \sim y), \text{ если существует прямая направления } \delta, \text{ содержащая } x \text{ и } y.$$

Тогда R — отношение эквивалентности на Π, и классы эквивалентности по этому отношению — это прямые направления δ.

Доказательство. Прямые направления δ образуют разбиение P множества Π, поскольку, с одной стороны, две такие прямые либо не пересекаются, либо совпадают, и с другой стороны, всякая точка множества Π принадлежит какой-нибудь прямой направления δ. Наконец, для каждой точки x множество точек y, таких, что $x \sim y$, есть не что иное, как прямая направления δ, проходящая через x; следовательно, данное отношение R есть не что иное, как отношение эквивалентности, порождаемое разбиением P.

Замечание. Следует четко различать отношение параллельности, которое является отношением эквивалентности на $\mathscr{D}$, и только что описанное отношение R, которое является отношением эквивалентности на Π и которое, кроме того, зависит от выбора направления δ.

3. Косая проекция

Пусть D — некоторая прямая и δ — некоторое направление, отличное от направления прямой D (такое δ существует по следствию 2.5). Для всякой точки $m \in \Pi$ прямая направления δ, проходящая через m, пересекает D в некоторой точке $\varphi(m)$ (рис. 1).

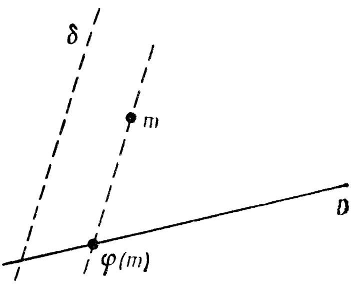

Рис. 1.

Определение 3.1. Отображение φ множества Π в множество D называется *косой проекцией* Π на D параллельно направлению δ (поскольку δ является направлением некоторой прямой A и всех ей параллельных, то говорят также «параллельной проекцией в направлении A»).

Легко видеть, что неподвижными точками отображения φ, т. е. такими точками x, что $\varphi(x) = x$, будут точки прямой D, и только они.

Имеем

$$\varphi(\Pi) = D \quad \text{и} \quad \varphi(D) = D.$$

Косая проекция — одно из основных орудий, используемых в геометрических доказательствах; по мере того как мы будем увеличивать число аксиом, будет расти, как мы увидим, число свойств косой проекции.

Иногда будет удобно называть также косой проекцией ограничение косой проекции на некоторое подмножество множества П.

Предложение 3.2. *Пусть A, B — две произвольные прямые и δ — произвольное направление, отличное от направлений этих прямых* (такое направление существует по следствию 2.5). *Косая проекция прямой A на прямую B параллельно δ есть биекция множества A на множество B.*

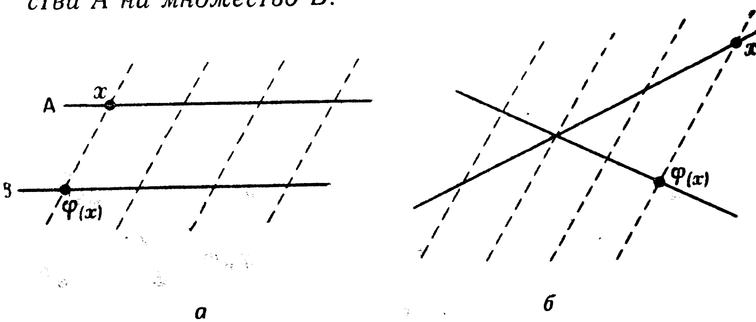

Рис. 2.

Доказательство. Пусть φ — такая косая проекция; она взаимно однозначна, поскольку если x и x' — две различные точки прямой A, то прямые направления δ, проходящие через эти точки, также различны и, следовательно, пересекают прямую B в двух различных точках $\varphi(x)$ и $\varphi(x')$. Наконец, $\varphi(A) = B$, поскольку для всякой точки y прямой B прямая направления δ, проходящая через y, пересекает прямую A в некоторой точке x, и $\varphi(x) = y$.

Очевидно, косая проекция прямой B на прямую A параллельно δ есть не что иное как φ^{-1}.

Следствие 3.3. *Мощность всех прямых (подмножеств) множества* П *выражается одним и тем же кардинальным числом* (это кардинальное число будет обозначаться через α; оно конечно или бесконечно в зависимости от того, какую плоскость П мы изучаем), Замечание. Симметричность ролей прямых A и B по отношению к косым проекциям φ и φ^{-1} можно подчеркнуть следующим фактом:

Разбиение множества Π на прямые направления δ влечет за собой некоторое разбиение множества $A \cup B$, каждый класс которого содержит две точки, x и $\varphi(x)$, — одну на прямой A и другую на прямой B (рис. 2, *а*, *б*); эти точки различны, за исключением точки $x = \varphi(x) = A \cap B$ (мы здесь рассматриваем случай, когда прямые A и B пересекаются).

4. Система осей

Пусть D_1, D_2 — две пересекающиеся прямые. Обозначим через φ_1 косую проекцию на D_1 параллельно D_2 и через φ_2 — косую проекцию на D_2 параллельно D_1.

Для любой точки $m \in \Pi$ точки $\varphi_1(m)$ и $\varphi_2(m)$ (рис. 3) называются составляющими точки m по отношению к системе осей D_1, D_2; пересечение прямых D_1 и D_2 называется началом системы.

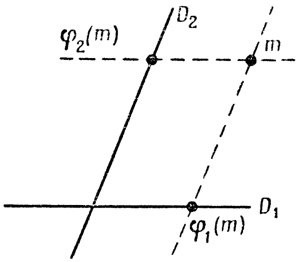

Рис. 3.

Каждой паре (m_1, m_2) точек плоскости Π, где $m_1 \in D_1$ и $m_2 \in D_2$, соответствует единственная точка m плоскости Π, для которой $m_1 = \varphi_1(m)$ и $m_2 = \varphi_2(m)$; это — точка пересечения прямой, параллельной D_2 и проходящей через m_1, и прямой, параллельной D_1 и проходящей через m_2. Отображение $m \to (\varphi_1(m), \varphi_2(m))$ есть, следовательно, биективное отображение множества Π *на* множество-произведение $D_1 \times D_2$.

Это можно до некоторой степени выразить так: (D_1, D_2) есть репер*) плоскости, и каждая точка

*) Под «репером» (от французского слова repère — метка, зарубка) некоторого множества элементов M в математике понимают геометрический образ, позволяющий охарактеризовать положение по отношению к нему каждого элемента ξ множества M определенной системой чисел («координатами» ξ).

плоскости П определяется двумя своими составляющими.

В частности, отсюда вытекает, что кардинальное число множества П (плоскости) есть α^2 — это сохраняет силу как для конечного, так и для бесконечного α.

§ 2. АКСИОМЫ ПОРЯДКА

Первая аксиома порядка вводит порядок на каждой прямой; вторая аксиома устанавливает связь между порядками на различных прямых.

5. Структура порядка на произвольной прямой

Аксиома $\mathrm{II_a}$. *С каждой прямой D связаны две структуры линейного порядка, противоположные друг другу.*

Эта аксиома сформулирована сжато, поскольку предполагается известным понятие линейного порядка на множестве.

С помощью этой аксиомы на прямой вводится сразу две структуры порядка; это связано с тем, что на прямой не существует никакого естественного признака, позволившего бы отдать предпочтение одному из этих порядков. Очевидно, задание одного из этих порядков определяет второй. Можно было бы избежать обращения к этим двум порядкам, рассматривая вместо них тернарное отношение «точка x расположена между точками y и z», удовлетворяющее соответствующим образом подобранным аксиомам; но таким отношением сложнее пользоваться, чем отношением порядка, может быть из-за того, что оно тернарное.

Терминология. 1. Всякую прямую, на которой задан один из существующих на ней двух порядков, называют *ориентированной прямой.*

2. Для любых двух различных точек a, b выражение *«ориентированная прямая* $\Delta(a, b)$» обозначает прямую $\Delta(a, b)$, ориентированную так, что $a < b$.

3. Для всякой ориентированной прямой D и всякой точки $a \in D$ множество $\{x : a < x\}$ (соответственно $a \leqslant x$) называют *открытым* (соответственно *замкнутым*) *положительным лучом* (ориентированной) *прямой D с началом в точке a*. Выражение «луч $D(a, b)$» обозначает *положительный* луч (открытый или замкнутый) ориентированной прямой $\Delta(a, b)$ с началом в точке a.

4. Для любых двух различных точек a, b плоскости Π прямая $\Delta(a, b)$ определяется единственным образом; относительно обоих порядков на этой прямой интервалы $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ совпадают; следовательно, эти обозначения имеют точный смысл.

Наконец, для всякой точки a по смыслу наших обозначений

$$[a, a] = \{a\} \quad \text{и} \quad]a, a[= \varnothing.$$

Определение 5.1. Говорят, что подмножество X множества Π *выпукло*, если для всех $x, y \in X$ имеем $[x, y] \subset X$.

Например, множество Π выпукло; всякая прямая, всякий луч и всякий интервал — выпуклые множества; другие важные примеры мы сможем привести немного позже. Легко видеть, что пересечение любого семейства (X_i) выпуклых подмножеств множества Π есть выпуклое множество. Пусть теперь A — произвольное подмножество множества Π; существуют выпуклые множества, содержащие A и отличные от Π; их пересечение выпукло и является, очевидно, наименьшим выпуклым множеством, содержащим A; его называют выпуклой оболочкой множества A.

6. Аксиома перехода

Аксиома $\mathrm{II_b}$. (Связь между структурами порядка на различных прямых.) *Для всякой пары (A, B) параллельных прямых и для любых точек a, b, a', b', таких, что $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$, всякая прямая, па-*

раллельная этим двум прямым и пересекающая $[a, b]$, *пересекает также и* $[a', b']$ (рис. 4).

Заметим, что если $A = B$, то эта аксиома выражает очевидное следствие из предыдущих определений. Таким образом, она интересна лишь в случае $A \neq B$.

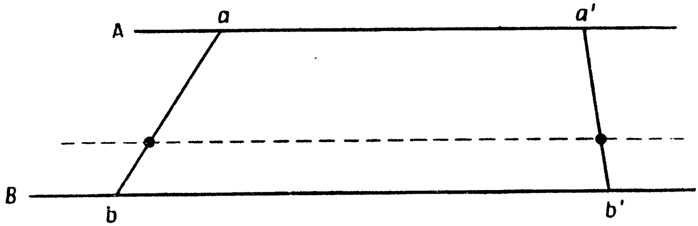

Рис. 4.

Предложение 6.1. *Пусть* D — *некоторая прямая,* δ — *некоторое направление, отличное от направления прямой* D, *и* φ — *косая проекция на* D *параллельно* δ. *Тогда для всех* $x, y \in \Pi$

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Доказательство. Утверждение очевидно в том случае, когда x и y расположены на одной прямой A направления δ, так как при этом $\varphi(x) = \text{const}$ для $x \in A$, и следовательно,

$$\varphi([x, y]) = \{\varphi(x)\} = \{\varphi(y)\}.$$

Пусть теперь A и B — две различные прямые направления δ, проходящие через точки x и y соответственно; по аксиоме $\mathrm{II_b}$ отображение φ есть биекция отрезка $[x, y]$ на отрезок $[\varphi(x), \varphi(y)]$, что и доказывает предложение 6.1.

Следствие 6.2. *Для всякого выпуклого множества* $X \subset \Pi$ *его проекция* $\varphi(X)$ *на* D *есть также выпуклое множество.*

Для всякого выпуклого множества $X \subset D$ *множество* $\varphi^{-1}(X)$ *также выпукло.*

Следствие 6.3. *Пусть A, B — две ориентированные прямые и δ — некоторое направление, отличное от направлений этих прямых. Косая проекция φ прямой A на прямую B параллельно направлению δ относительно порядков прямых A и B есть монотонное отображение A на B — убывающее или возрастающее.*

Действительно, из предложения 6.1 следует, что для всякой тройки (x, y, z) точек прямой A

$$(y \text{ между } x \text{ и } z) \Rightarrow (\varphi(y) \text{ между } \varphi(x) \text{ и } \varphi(z)),$$

откуда следует, что отображение φ монотонно (возрастающее или убывающее).

Следствие 6.4. *Если отвечающее всякой прямой Δ плоскости Π кардинальное число $\alpha > 2$, то всякий открытый луч плоскости Π не пуст.*

Доказательство. Пусть D — произвольная прямая, и пусть $a \in D$. На плоскости Π существует прямая D', параллельная прямой D и отличная от нее; по предположению на прямой D' существует по крайней мере три различных между собой точки x', y', a', такие, что $a' \in [x', y']$.

Направление прямой $\Delta(a, a')$ отлично от направлений прямых D и D'; следовательно (предложения 3.2 и 6.1), проекции a, x, y точек a', x', y' на прямую D параллельно прямой $\Delta(a, a')$ все попарно различны, и $a \in [x, y]$. Поэтому оба открытых луча прямой D с началом a не пусты.

Из следствия 6.4 сразу же вытекает, что кардинальное число $\alpha > 2$, отвечающее всякой прямой плоскости Π, обязательно б е с к о н е ч н о. Последний результат непосредственно следует из аксиомы III, но нам удобнее уже сейчас считать его известным.

7. Разбиение плоскости некоторой прямой

Предложение 7.1. *Предположим, что кардинальное число $\alpha > 2$. Для всякой прямой D существует единственное разбиение множества $(\Pi \setminus D)$ на два* *выпуклых множества* Π_1 *и* Π_2. *Оба эти множества не пусты, и для любых* $x_1 \in \Pi_1$, $x_2 \in \Pi_2$ *отрезок* $[x_1, x_2]$ *пересекается с прямой* D.

Доказательство. 1) *Существование.* Пусть A — прямая, пересекающая прямую D в точке a. Обозначим через φ проекцию на A параллельно D и через A_1, A_2 — открытые лучи прямой A с началом в a. Эти лучи выпуклы и образуют разбиение множества $A \setminus \{a\}$; следовательно (следствие 6.2), оба множества $\Pi_i = \varphi^{-1}(A_i)$ $(i = 1, 2)$ выпуклы и образуют разбиение множества $(\Pi \setminus D)$.

2) *Единственность.* Пусть (E_1, E_2) — еще одно разбиение множества $(\Pi \setminus D)$ на выпуклые множества. Каждое из множеств $\varphi(E_i)$ выпукло и содержится в множестве $A_1 \cup A_2$, т. е. в одном из лучей A_1, A_2. Другими словами, каждое из множеств E_i содержится в одном из множеств Π_i, и так как $E_1 \cup E_2 = \Pi_1 \cup \Pi_2$ и каждое из множеств Π_i не пусто, то

$$\text{либо } E_1 = \Pi_1 \text{ и } E_2 = \Pi_2, \text{ либо } E_1 = \Pi_2 \text{ и } E_2 = \Pi_1.$$

Следовательно, с точностью до порядка индексов разбиение (E_1, E_2) совпадает с разбиением (Π_1, Π_2).

3) Наконец, если $x_1 \in \Pi_1$ и $x_2 \in \Pi_2$, то концы отрезка $\varphi([x_1, x_2])$ принадлежат соответственно A_1 и A_2, и значит, этот отрезок содержит точку a. Следовательно, $[x_1, x_2]$ пересекается с множеством $\varphi^{-1}(\{a\}) = D$.

Определение 7.2. Множества Π_1, Π_2, фигурирующие в предложении 7.1, называются *открытыми полуплоскостями*, определенными прямой D. Множества $\Pi_1 \cup D$, $\Pi_2 \cup D$ называются *замкнутыми полуплоскостями*, определенными D; они также выпуклы (так как $\Pi_i \cup D = \varphi^{-1}(A_i \cup \{a\})$).

Упражнения к главе I

Приведенные ниже упражнения отнюдь *не являются обязательными*, при этом некоторые из них могут быть решены более простым способом после прохождения некоторых из последующих разделов. Цель этих упражнений — *приобретение навыков* *обращения с аксиомами* на той стадии, когда в распоряжении учащегося еще почти нет теорем.

1. Пусть E — некоторое множество и $\mathscr{L}$ — множество его подмножеств. Для L_1, $L_2 \in \mathscr{L}$ будем говорить, что L_1 и L_2 параллельны (обозначается $L_1 \| L_2$), если либо $L_1 = L_2$, либо $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Предположим, что $\mathscr{L}$ удовлетворяет следующей аксиоме:

«Для любого $L \in \mathscr{L}$ и любого $a \in E$ существует единственное $L' \in \mathscr{L}$, такое, что $a \in L'$ и $L' \| L$».

Показать, что эта аксиома эквивалентна следующей:

«Отношение параллельности есть отношение эквивалентности на $\mathscr{L}$».

Используя эту аксиому, показать, что для любого L отношение на множестве E, определяемое условием

«$a \sim b$, если существует L', параллельное L и содержащее a и b»,

есть отношение эквивалентности и что его классы эквивалентности есть элементы множества $\mathscr{L}$, параллельные L.

2. Пусть K — произвольное поле; назовем *прямой* множества $K^2 = K \times K$ всякое подмножество этого множества, определяемое отношением вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad (a_1,\ a_2,\ b \in K;\ a_1 \text{ и } a_2 \text{ не равны нулю одновременно}).$$

Показать, что в этом случае множество K^2 удовлетворяет аксиомам группы I.

3. Исследовать, в частности, случай, когда K — конечное поле (например, поле вычетов по модулю p, где p — простое).

Исследовать также случай, когда K есть поле C комплексных чисел.

Во всех следующих упражнениях мы будем предполагать *выполненными аксиомы* I *и* II.

4. Показать, что за исключением того случая, когда кардинальное число α равно 2 (в этом случае П изоморфно K^2, где K — поле вычетов по модулю 2), кардинальное число всякого открытого интервала $]a, b[$ бесконечно (если $a \neq b$).

Более точно: показать, что всякий открытый луч и всякий непустой открытый интервал изоморфны (относительно данного порядка) некоторой прямой.

Во всех следующих упражнениях мы будем предполагать, что $\alpha > 2$.

5. Пусть A, B, C — три луча с началом в точке 0, принадлежащие трем разным прямым.

Показать, что либо любые два из этих лучей расположены по разные стороны от прямой, несущей третий луч, либо существует прямая, не проходящая через 0 и пересекающая A, B и C.

6. Пусть A, B — два луча с общим началом 0, не принадлежащие одной прямой. Назовем *сектором* (A, B) пересечение полуплоскости, определенной прямой A и содержащей луч B, с полуплоскостью, определенной прямой B и содержащей луч A. Пусть теперь D — произвольный луч с началом 0, отличный от лучей A и B и принадлежащий сектору (A, B).

Показать, что D пересекает любой отрезок $[a, b]$, где $a \in A$ и $b \in B$, равно как и всякую прямую, параллельную A и пересекающую B.

7. Вывести из предыдущего упражнения, что если (a, b, c) — произвольная тройка точек, не принадлежащих одной прямой, и c' — точка пересечения прямых, параллельных прямым $\Delta(a, c)$ и $\Delta(b, c)$ и проходящих через точки b и a соответственно, то c и c' лежат по разные стороны от прямой $\Delta(a, b)$.

Показать, что интервалы $]a, b[$ и $]c, c'[$ пересекаются.

8. Пусть 0, a, b — три точки плоскости Π, не принадлежащие одной прямой, и пусть $a' \in [0, a]$ и $b' \in [0, b]$.

Показать, что для всех $m \in [a, b]$ отрезки $[0, m]$ и $[a', b']$ пересекаются. Вывести отсюда, что объединение отрезков $[0, x]$, соединяющих точку 0 с точками x некоторого выпуклого множества, выпукло. Распространить этот результат на случай объединения отрезков, соединяющих точки двух выпуклых множеств.

9. Показать, что выпуклая оболочка всякого конечного множества (наименьшее выпуклое множество, содержащее данное множество) есть пересечение конечного числа замкнутых полуплоскостей.

В частности, выпуклая оболочка трех не принадлежащих одной прямой точек a, b, c называется *треугольником*; это есть пересечение замкнутых полуплоскостей, определенных прямыми $\Delta(a, b), \Delta(b, c), \Delta(a, c)$ и содержащих соответственно точки c, a, b.

10. Дать несколько эквивалентных определений *полосы*, задаваемой двумя параллельными прямыми A, B. Под *направлением полосы* мы будем впредь понимать направление задающих ее параллельных прямых.

11. Подмножество X множества Π называется *ограниченным*, если для всякого направления δ множество X содержится в некоторой полосе этого направления.

Показать, что всякое конечное множество ограничено.

Показать, что если множество X содержится в двух полосах различного направления, то оно ограничено.

Показать, что всякое ограниченное множество содержится в некотором треугольнике.

12. a) Определить топологию на прямой, исходя из понятия открытого интервала.

b) Пусть D_1, D_2 — две пересекающиеся прямые плоскости Π; отождествить Π с множеством $D_1 \times D_2$ и задать на Π топологию пространства-произведения, исходя из топологий на прямых D_1 и D_2. Показать, что эта топология не зависит от выбора прямых D_1 и D_2.

13. Пусть $X \subset \Pi$, и пусть $a, b \in X$; положим $(a \sim b)$, если существует такая ломаная линия с концами a и b, что все ее прямолинейные звенья принадлежат множеству X. Это отношение есть отношение эквивалентности на X; его классы эквивалентности называются *компонентами связности* множества X.

Пусть теперь P — замкнутый плоский многоугольник без самопересечений, т. е. такой, что любые две его не смежные стороны не имеют общих точек, и пусть C — граница многоугольника P (объединение его сторон). Показать, что множество $(\Pi \setminus C)$ имеет в точности две компоненты связности, одна из которых ограничена; показать, что в топологии пространства Π обе эти компоненты являются открытыми множествами и что всякая точка множества C является для них точкой прикосновения (*теорема Жордана*).

Решение этой задачи элементарно, но не очевидно.

Указание: выбрать некоторое направление δ, отличное от направлений сторон многоугольника, и провести прямые направления δ через вершины многоугольника P; упорядочить множество этих параллельных и рассмотреть последовательность определяемых ими полос.

14. Пусть K — линейно упорядоченное поле:

$$(a \leqslant b) \Rightarrow (a + x \leqslant b + x) \quad \text{и} \quad (0 \leqslant a,\ 0 \leqslant b) \Rightarrow (0 \leqslant ab).$$

Определить на множестве K^2 структуру плоскости, удовлетворяющей аксиомам I и II (см. сначала упр. 2).

Привести примеры подобных полей K, отличных от подполей поля R вещественных чисел.

15. Пусть Π — открытый круг классической плоскости R^2. Назовем «прямой» множества Π всякую открытую дугу окружности, содержащуюся в Π, концы которой являются концами какого-нибудь диаметра круга Π; на каждой из них введем естественным образом порядок.

Показать, что в Π выполняются аксиомы I и II и что это пространство не изоморфно (относительно введенного таким образом порядка) пространству R^2, хотя его «прямые» изоморфны R.

Построить другие аналогичные примеры в открытом круге Π, выбрав в качестве семейства «прямых» те или иные семейства, инвариантные относительно вращения, причем концы этих «прямых» должны совпадать с концами некоторого диаметра круга. (Для того чтобы проверить, изоморфна ли такая плоскость классической плоскости, рекомендуем воспользоваться классическим свойством сетки, образованной двумя системами параллельных прямых.)

ГЛАВА II

АКСИОМЫ АФФИННОЙ СТРУКТУРЫ

§ 1. АФФИННАЯ СТРУКТУРА ПРЯМЫХ ПРОСТРАНСТВА П

8. Первая аксиома аффинной структуры

В формулировке аксиомы, которую мы сейчас приведем, фигурируют вещественные числа; но на самом деле во всей главе будет существенно лишь то, что R есть линейно упорядоченное архимедово поле (но без аксиомы непрерывности!). Из этого замечания следует, что при обучении подростков 12—16 лет можно обойтись без использования полноты поля R и связанных с этим понятий верхней грани, сечения, возрастающей последовательности или фундаментальной последовательности.

Аксиома III$_a$. (Аффинная структура прямой.) *Для плоскости* Π *определено некоторое отображение* d *множества* $\Pi \times \Pi$ *в множество* R_+, *называемое расстоянием и обладающее следующими свойствами*:

1. $d(y, x) = d(x, y)$ *для всех* $x, y \in \Pi$.

2. *Для любой ориентированной прямой* D, *любого* $x \in D$ *и любого числа* $l \geqslant 0$ *на прямой* D *существует единственная точка* y, *такая, что*

$$x \leqslant y \quad \text{и} \quad d(x, y) = l.$$

3. $(x \in [a, b]) \Rightarrow (d(a, x) + d(x, b) = d(a, b))$.

Эта аксиома задает аффинную структуру каждой отдельной прямой D плоскости Π; несколько ниже она будет дополнена аксиомой III$_b$, устанавливающей связь между аффинными структурами различных прямых.

Очевидные следствия

1. В соответствии с аксиомой III_{a_3} для всех x, y

$$d(x, x)+d(x, y)=d(x, y), \text{ откуда } d(x, x)=0.$$

Если $x \neq y$, то при $x<y$ из отношения $x \leqslant x \leqslant y$ по аксиоме III_{a_2} следует, что $d(x, y) \neq 0$ *).

Таким образом, $(d(x, y)=0) \Leftrightarrow (x=y)$.

2. По аксиоме III_{a_3}

$$(x \in [a, b]) \Rightarrow (d(a, x) \leqslant d(a, b)),$$

где равенство имеет место только в случае $x=b$.

9. Изоморфизм R и центрированной прямой плоскости П

Предложение 9.1. *Для всякой ориентированной прямой D и для любой точки $a \in D$ существует одно и только одно такое возрастающее отображение f прямой D на R, что*

$$f(a)=0 \quad \text{и} \quad d(x, y)=|f(y)-f(x)| \quad \text{для всех } x, y \in D.$$

Это отображение есть биекция множества D на множество R.

Доказательство. 1. *Единственность.*

Из условий, накладываемых на отображение f, следует, что $d(x, a)=|f(x)|$ (положите $y=a$), откуда, поскольку отображение f возрастающее и $f(a)=0$, вытекает

$$f(x)=d(a, x), \quad \text{если} \quad a<x;$$

$$f(x)=-d(a, x), \quad \text{если} \quad x<a.$$

2. Покажем, что отображение f, задаваемое этими двумя равенствами, удовлетворяет условиям теоремы.

---

*) Ибо в противном случае равенства $d(x, x)=d(x, y)=0$ противоречили бы условию единственности в аксиоме III_{a_2}.

Из аксиомы III_{a_3} следует

$$(x \leqslant a \leqslant y) \Rightarrow (d(x, y) = d(x, a) + d(a, y) = \\ = -f(x) + f(y));$$

$$(a \leqslant x \leqslant y) \Rightarrow (d(a, y) = d(a, x) + d(x, y)), \\ \text{т. е. } f(y) = f(x) + d(x, y);$$

$$(x \leqslant y \leqslant a) \Rightarrow (d(x, a) = d(x, y) + d(y, a)), \\ \text{т. е. } -f(x) = d(x, y) - f(y).$$

В каждом из этих случаев имеем, следовательно, $d(x, y) = f(y) - f(x)$ для всех x, y, таких, что $x \leqslant y$.

Так как $d(x, y) \geqslant 0$, то отсюда вытекает также, что

$$d(x, y) = |f(y) - f(x)| \quad \text{и} \quad f(x) \leqslant f(y),$$

т. е. отображение f — возрастающее.

С другой стороны,

$$(x < y) \Rightarrow (f(y) - f(x) = d(x, y) \neq 0);$$

следовательно, отображение f взаимно однозначно. Наконец, как видно из аксиомы III_{a_2}, для всякого $l \geqslant 0$ найдутся такие x, y, что

$$a \leqslant x \quad \text{и} \quad d(a, x) = l, \quad \text{откуда} \quad f(x) = l;$$

$$y \leqslant a \quad \text{и} \quad d(a, y) = l, \quad \text{откуда} \quad f(y) = -l.$$

Другими словами, $f(D) = R$.

Следствия. Из теоремы 9.1 вытекает, что всякая ориентированная *центрированная* прямая D (т. е. прямая, на которой выбрано некоторое «начало») изоморфна множеству R; этот изоморфизм единствен и сохраняет структуру рассматриваемой прямой, определяемую введенными на ней порядком и расстоянием.

Поэтому мы можем всегда, когда нам это удобно, отождествлять ориентированную центрированную прямую с пространством R, перенося на такую прямую с помощью изоморфизма f все понятия и свойства поля R. Точнее, пусть $(D, 0)$ — некоторая ориентированная центрированная прямая с началом в точке 0 и f — каноническое отображение этой прямой на пространство R.

1. Абсциссой точки x в системе $(D, 0)$ будет $f(x)$; значение абсциссы равно $d(0, x)$ или $-d(0, x)$ в зависимости от того, имеет ли место случай $0 < x$ или $x < 0$.

2. Ориентированным расстоянием точек (x, y) центрированной прямой $(D, 0)$ будем называть число

$$\overline{xy} = f(y) - f(x) = \overline{0y} - \overline{0x}.$$

Ориентированное расстояние $\overline{xy}$ равно $d(x, y)$ или $-d(x, y)$ в зависимости от того, имеет ли место случай $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$; таким образом, оно не зависит от выбора начала 0 на прямой D и меняет знак при изменении порядка прямой D на обратный. При этом ясно, что здесь выполняется *тождество Шаля*

$$\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx} = 0, \text{ или } \overline{xy} + \overline{yz} = \overline{xz} \text{ для всех } x,\ y,\ z.$$

Часто бывает удобно, если в ходе рассуждений начало отсчета 0 на прямой D не меняется, обозначать одной буквой x и точку x, и ее абсциссу; это упрощает выкладки; например, можно писать $\overline{xy} = y - x$, как в случае поля R.

3. Центрированная прямая $(D, 0)$ обладает структурой одномерного векторного пространства R^1 с началом в точке 0.

4. Переносом a в системе $(D, 0)$ называется преобразование

$$x \to x + a;$$

перенос есть *движение*.

Растяжением*) в системе $(D, 0)$ называют преобразование $x \to kx + a$ $(k \in R^*)$; при $k = 1$ или

*) Отметим непривычное для русского читателя использование двух разных терминов «гомотетия» (homothétie — см. ниже, стр. 55) и «растяжение» (dilatation) для родственных друг другу понятий: растяжение $x \to kx + a$ с «коэффициентом» $k \neq 1$ есть гомотетия. (См. ниже предложение 24.3.)

$k = -1$ это будет также движение (перенос или центральная симметрия). Обратно, *всякое движение прямой D есть либо перенос, либо* (центральная) *симметрия.*

5. Серединой пары (x, y) точек плоскости Π, где $x \neq y$, называется точка m прямой $\Delta(x, y)$, определяемая на этой прямой с произвольно выбранным началом условием $m - x = y - m$; таким образом, это есть точка $m = \frac{1}{2}(x + y)$. Серединой пары (x, x) называется точка x.

6. Для всех точек x, y, z прямой D имеем

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z);$$

здесь равенство достигается, если $y \in [x, z]$, и только в этом случае.

7. Деление пары (x, y) в заданном отношении; сложное отношение, в котором пара точек делит другую пару точек той же прямой.

8. Дробно-линейные (проективные) преобразования прямой D, дополненной бесконечно удаленной точкой; инволюции.

§ 2. СТРУКТУРА АДДИТИВНОЙ ГРУППЫ В СИСТЕМЕ $(\Pi, 0)$

10. Аксиома перехода

Аксиома IIIb. (Связь между аффинными структурами различных прямых.) *Для всякой пары (A, B) параллельных прямых и для любых точек a, b, a', b', таких, что $a, a' \in A$, и $b, b' \in B$, прямая, параллельная данным двум прямым и проходящая через середину пары (a, b), проходит также через середину пары (a', b')* (рис. 5).

Теперь мы можем перейти к определению групповой структуры на множестве Π с заданной на нем начальной точкой («началом»).

11. Косая проекция и параллелограмм

Лемма 11.1. *Пусть D — некоторая прямая, δ — некоторое направление, отличное от направления этой*

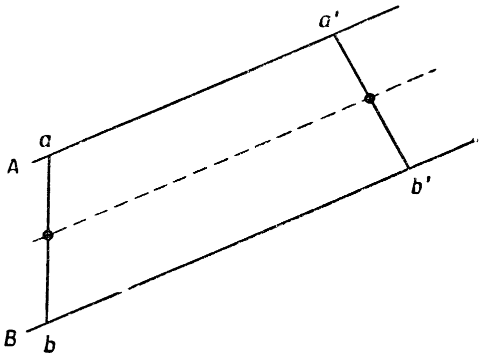

Рис. 5.

прямой, и φ — косая проекция на D параллельно δ. Тогда

$$(m - \text{середина пары } (x, y)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\varphi(m) - \text{середина пары } (\varphi(x), \varphi(y))).$$

Обычно этот результат формулируется так: косая проекция сохраняет середины отрезков.

Доказательство. Пусть A, B — прямые направления δ, проходящие через точки x и y соответственно. Из аксиомы $\mathrm{III_b}$ следует, что прямая направления δ, проходящая через точку m, проходит также через середину пары $(\varphi(x), \varphi(y))$.

Таким образом, лемма 11.1 — это всего лишь другая форма аксиомы $\mathrm{III_b}$.

Следствие 11.2. *Пусть (D_1, D_2) — некоторая система осей, и пусть x, y, m — три точки плоскости П, составляющие которых равны (x_1, x_2), (y_1, y_2), (m_1, m_2). Тогда*

$$(m - \text{середина пары } (x, y)) \Leftrightarrow (m_1 - \text{середина пары } (x_1, y_1) \text{ и } m_2 - \text{середина пары } (x_2, y_2)).$$

Определение 11.3. *Параллелограммом* называется всякая четверка (a, b, a', b') точек плоскости П, такая, что середины пар (a, a') и (b, b') совпадают. При этом пары точек (a, a') и (b, b') называются *диагоналями* параллелограмма.

Непосредственно из определения следует, что (a, b', a', b) также есть параллелограмм. Пользуясь понятием центральной симметрии, можно дать другое определение параллелограмма.

Пусть x, y, $m \in \Pi$; говорят, что x, y *симметричны* относительно точки m, если m есть середина пары (x, y). Для любых x, $m \in \Pi$ существует единственная точка y, такая, что x, y симметричны относительно m: если $x = m$, то $y = m$; если $x \neq m$, то точка y лежит на ориентированной прямой $\Delta(x, m)$ и определяется равенством $\overline{xm} = \overline{ym}$.

Определение 11.4. Для любой точки $m \in \Pi$ будем называть *центральной симметрией* с центром в точке m (или *центральной симметрией относительно* m) отображение s плоскости П в себя, при котором каждой точке x ставится в соответствие точка $s(x)$, симметричная x относительно точки m.

Очевидно, s^2 — тождественное отображение; следовательно, s — инволютивное преобразование плоскости П.

Имеет место следующая эквивалентность:

$((a, b, a', b')$ — параллелограмм$) \Leftrightarrow (a'$, b' — образы точек a, b при некоторой центральной симметрии$)$.

Теперь понятно, что для любых точек a, b, $b' \in \Pi$ найдется такая точка a', и притом только одна, что (a, b, a', b') будет параллелограммом; это точка, симметричная точке a относительно середины пары (b, b').

Следствие 11.5 (из леммы 11.1). *При любой косой проекции параллелограмм переходит в параллелограмм.*

Действительно, если середины пар (a, a') и (b, b') совпадают, то, согласно лемме, совпадают и середины пар $(\varphi(a), \varphi(a'))$; $(\varphi(b), \varphi(b'))$.

12. Сложение на центрированной плоскости (П, 0) и ее групповая структура

Определение 12.1. Для любой точки $0 \in \Pi$ будем называть пару $(\Pi, 0)$ *центрированной плоскостью* П *с началом* 0.

Сложением на $(\Pi, 0)$ будем называть бинарную операцию $(x, y) \to x \top y$ на П, задаваемую условием $x \top y = z$, где z — такая точка плоскости П, что четверка точек $(0, x, z, y)$ образует параллелограмм.

Лемма 12.2. *Пусть D — произвольная прямая, проходящая через* 0.

1. *На прямой D операция* $\top$ *совпадает со сложением на центрированной прямой* $(D, 0)$.

2. *Если φ — произвольная косая проекция на прямую D, то для любых x, $y \in \Pi$*

$$\varphi(x \top y) = \varphi(x) \top \varphi(y).$$

Доказательство. 1. Для любых x, $y \in D$ точка $x \top y$ есть такая точка $z \in D$, что $(0, x, z, y)$ — параллелограмм; следовательно, $x + y = x \top y$. Отсюда следует, что D устойчиво относительно оператора $\top$ *) и образует относительно $\top$ коммутативную группу.

2. По следствию 11.5 проекция $(0, \varphi(x), \varphi(x \top y), \varphi(y))$ параллелограмма $(0, x, x \top y, y)$ также есть параллелограмм, откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 12.3. 1. *Центрированная плоскость* (П, 0), *на которой задана операция* $\top$, *образует коммутативную группу с нейтральным элементом* 0.

2. *Всякая прямая плоскости* П, *проходящая через* 0, *образует подгруппу этой группы.*

---

*) Другими словами, что если $x, y \in D$, то и $x \top y \in D$.

3. *Для любой пары D_1, D_2 различных прямых, проходящих через точку* 0, *группа* (П, 0) *есть прямая сумма подгрупп D_1 и D_2; другими словами, любой $x \in \Pi$ может быть представлен единственным образом в виде*

$$x = x_1 \top x_2, \quad \text{где} \quad x_1 \in D_1 \quad \text{и} \quad x_2 \in D_2.$$

Кроме того, x_1 и x_2 есть составляющие точки x в системе осей (D_1, D_2).

4. *Всякий перенос группы* (П, 0) *переводит каждую прямую, проходящую через* 0, *в параллельную ей прямую; всякая прямая плоскости* П *может быть получена переносом из некоторой прямой, проходящей через* 0.

Доказательство. 1. Пусть D_1, D_2 — две различные прямые, проходящие через 0; обозначим через φ_1, φ_2 проекции на D_1, D_2 параллельно D_2 и D_1 соответственно. Как следует из леммы 12.2, для всех $x, y, z \in \Pi$ и для любого i $(i = 1, 2)$ имеем

$$\varphi_i(x \top y) = \varphi_i(x) \top \varphi_i(y) = \varphi_i(y) \top \varphi_i(x) = \varphi_i(y \top x),$$

$$\varphi_i((x \top y) \top z) = (\varphi_i(x) \top \varphi_i(y)) \top \varphi_i(z) = \\ = \varphi_i(x) \top (\varphi_i(y) \top \varphi_i(z)) = \varphi_i(x \top (y \top z)).$$

Отсюда следует, что составляющие точек $x \top y$ и $y \top x$ в системе осей (D_1, D_2) совпадают и, следовательно, эти точки идентичны; аналогично доказываем равенство $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$.

Другими словами, $\top$ — коммутативная и ассоциативная бинарная операция. Наконец, 0, очевидно, является нейтральным элементом относительно этой операции, и для всякой точки $x \in \Pi$ точка x', симметричная x относительно 0, удовлетворяет, очевидно, соотношению $x \top x' = 0$, т. е. элементы x и x' группы противоположны относительно этой операции.

2. Как следует из леммы 12.2, всякая прямая, проходящая через 0, образует подгруппу группы (П, 0).

3. Пусть $x \in \Pi$, и пусть x_1, x_2 — составляющие точки x в системе осей (D_1, D_2). Тогда

$$\varphi_1(x_1 \top x_2) = \varphi_1(x_1) \top \varphi_1(x_2) = x_1 \top 0 = x_1;$$

аналогично $\varphi_2(x_1 \mathsf{T} x_2) = x_2$. Другими словами, составляющие точки $x_1 \mathsf{T} x_2$ равны x_1, x_2, так что $x_1 \mathsf{T} x_2 = x$.

Наоборот, если $x = y_1 \mathsf{T} y_2$, где $y_1 \in D_1$ и $y_2 \in D_2$, то

$$x_1 = \varphi_1(x) = \varphi_1(y_1 \mathsf{T} y_2) = y_1 \mathsf{T} 0 = y_1;$$

аналогично получаем

$$x_2 = y_2.$$

Отсюда следует единственность разложения.

4. Пусть D_1 — некоторая прямая, проходящая через 0, и пусть $a \in \Pi$.

Если $a \in D_1$, то $(D_1 \mathsf{T} a) = D_1$, так как D_1 — подгруппа группы П. Если $a \notin D_1$, то прямая D_2, проходящая через точки a и 0, не совпадает с D_1, и, следовательно, (D_1, D_2) есть система координат с началом в точке 0. Пусть D_1' — прямая, параллельная прямой D_1 и проходящая через точку a; тогда имеют место очевидные эквивалентности:

$$(x \in D_1') \Leftrightarrow (x_2 = a) \Leftrightarrow (x = a \mathsf{T} x_1, \text{ где } x_1 \in D_1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in a \mathsf{T} D_1).$$

Иначе говоря,

$$D_1' = a \mathsf{T} D_1.$$

Рассмотрим теперь произвольную прямую D_1', не проходящую через точку 0; пусть D_1 — прямая, параллельная D_1' и проходящая через 0. Мы только что видели, что для всех $a \in D_1'$ выполняется равенство $D_1' = a \mathsf{T} D_1$.

Обозначения. Так как рассмотренная бинарная операция T в системе (П, 0) является групповой операцией коммутативной группы, а ограничение ее на всякую прямую, проходящую через 0, обозначается знаком $+$, то и сама операция будет обозначаться тем же знаком.

Следствие 12.4. *Пусть x, y, y' — три точки, не лежащие на одной прямой, D — прямая, параллельная $\Delta(x, y')$, проходящая через точку y, и D' — прямая, па-*

раллельная $\Delta(x, y)$, *проходящая через точку* y'. *Тогда*

$$((x,\ y,\ x',\ y') - \text{параллелограмм}) \Leftrightarrow (x' = (D \cap D')).$$

Эта эквивалентность непосредственно следует из третьей части теоремы 12.3, если за начало принять точку x.

Следствие 12.5.

$$(\textit{Точка } a - \textit{середина отрезка } (x,\ y)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + y = a + a,\ \textit{или}\ \ x + y = 2a).$$

Отсюда следует, что симметрия с центром в точке a есть отображение $x \to 2a - x$; это сразу приводит к тому, что произведение двух симметрий с центрами в точках a и b соответственно есть перенос плоскости (П, 0):

$$x \to 2(b - a) + x$$

и что произведение любого числа центральных симметрий и переносов есть перенос или центральная симметрия (в зависимости от четности или нечетности числа центральных симметрий).

Замечание. В доказательстве теоремы 12.3 нигде не используется структура порядка на плоскости: мы пользовались только аддитивной структурой на прямой. Поэтому можно ожидать, что это доказательство будет справедливо и при более слабых предположениях (аксиомах); мы приводим схему такой системы аксиом в приложении.

§ 3. ПЕРЕНОСЫ ПЛОСКОСТИ П

13. Характеристика переноса

Лемма 13.1. 1. *На центрированной плоскости* (П, 0) *середина пары* (a, a') *есть определяемая единственным образом точка* p, *такая, что* $2p = a + a'$.

2. $((a, b, a', b')$ — *параллелограмм*) $\Leftrightarrow$ $(a + a' = b + b')$.

Первое утверждение следует непосредственно из определения сложения, второе вытекает из эквивалентности

$$(2p = 2q) \Leftrightarrow (p = q).$$

Следствие. 1. *При всяком переносе середина пары точек переходит в середину их образов.*

2. *При всяком переносе параллелограмм переходит в параллелограмм.*

Действительно, заметим сначала, что

$$(2m = x + y) \Rightarrow (2(m + a) = (x + a) + (y + a)).$$

Отсюда также вытекает, что если (a, a') и (b, b') имеют общую середину, то она будет общей и для их образов при всяком переносе.

Предложение 13.2. *Отображение f множества* П *в себя будет переносом группы* (П, 0) *тогда и только тогда, когда для всех x, $y \in$* П *четверка точек $(x, f(x), f(y), y)$ образует параллелограмм.*

Доказательство. Обозначив через f перенос $x \to x + a$, получим равенство

$$x + f(y) = f(x) + y,$$

так как оно может быть записано в виде $x + (y + a) = (x + a) + y$.

Обратно, если преобразование f таково, что для всех x, y выполняется равенство $x + f(y) = f(x) + y$, то, положив $x = 0$, получим

$$f(y) = f(0) + y.$$

Следовательно, f — перенос. Из доказанного утверждения следует, что понятие переноса не зависит от выбора начала; в частности, получаем

Следствие. *Для любых a, $b \in$* П *всякий перенос группы* (П, a) *есть некоторый перенос группы* (П, b).

14. Изоморфизм групп (П, 0)

Предложение 14.1. 1. *Переносы группы* (П, 0) *образуют однотранзитивную группу преобразований плоскости* П; *эта группа* $\mathcal{T}$ *изоморфна группе* (П, 0); *соответствующий изоморфизм имеет вид*

$$a \to (\text{перенос } t_a\colon x \to x + a).$$

2. *Для всех* $a, b \in \Pi$ *отображение* $x \to f(x)$, *где* f — *перенос, переводящий* a *в* b, *есть изоморфизм группы* (Π, a) *на* (Π, b).

Доказательство. 1. Это свойство любой группы; докажем его для данного случая. Обозначим через f_a перенос $x \to x + a$ системы (П, 0).

Отображение $a \to f_a$ взаимно однозначно, так как

$$(a \neq b) \Rightarrow (f_a(0) \neq f_b(0)).$$

Далее,

$$f_{a+b}(x) = x + (a + b) = (x + a) + b = f_b(f_a(x)) = f_b \circ f_a(x);$$

следовательно, отображение $a \to f_a$ есть представление, а значит, и изоморфизм.

2. Прежде всего, f — биекция группы (Π, a) на группу (Π, b). Обозначим групповые операции в этих группах соответственно через $\top$ и $\perp$. Для всех $x, y \in \Pi$ четверка $(a, x, x \top y, y)$ есть параллелограмм; следовательно, и четверка $(b, f(x), f(x \top y), f(y))$ образует параллелограмм (следствие из леммы 13.1). Иначе говоря, $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$.

15. Свободные векторы и тождество Шаля

Определение 15.1. Для всякой пары (x, y) точек плоскости *свободным вектором*, порожденным парой (x, y), называется перенос плоскости П, переводящий x в y; этот перенос (свободный вектор) обычно обозначают символом $\overrightarrow{xy}$.

На языке свободных векторов композиция переносов обозначается с помощью аддитивной символики.

Для любых x, y, $z \in \Pi$

$$\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz};$$

это отношение просто выражает тот факт, что результатом переноса, переводящего x в y, и переноса, переводящего y в z, является перенос, переводящий x в z.

В общем случае

$$\overrightarrow{x_1x_2} + \overrightarrow{x_2x_3} + \ldots + \overrightarrow{x_{n-1}x_n} = \overrightarrow{x_1x_n} \quad (\textit{тождество Шаля}).$$

В частности, $\overrightarrow{xx}$ есть тождественный перенос, обозначаемый через 0; таким образом, можно писать

$$\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yx} = 0, \quad \text{или} \quad \overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}.$$

Заметим, что в системе $(\Pi, 0)$ для всех $x, y, z \in (\Pi, 0)$

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{(x+z)(y+z)},$$

откуда, в частности, следует, что

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{0(y-x)}.$$

Часто в ходе вычислений бывает также удобно отождествлять множество свободных векторов плоскости П с множеством элементов группы $(\Pi, 0)$; однако, не следует никогда упускать из виду, что в этом случае речь идет о двух различных множествах, не совпадающих, а только изоморфных.

16. Действие переноса на ориентированную прямую

В п. 4 теоремы 12.3 утверждается, что множество $\mathcal{D}_\delta$ прямых, отвечающих направлению δ, устойчиво относительно всякого переноса и что группа переносов транзитивно действует на этом множестве.

Сейчас мы займемся изучением действия произвольного переноса на ориентированную прямую.

Предложение 16.1. *Пусть D — произвольная ориентированная прямая и f — некоторый перенос. Если $f(D) = D$, то f есть изоморфизм прямой D на себя (по отношению порядка). Если $f(D) \neq D$, то f есть изоморфизм или антиизоморфизм прямой D на множество $f(D)$ (в зависимости от порядка, выбранного на множестве $f(D)$).*

Доказательство. Если $f(D) = D$, то ограничение отображения f на D есть перенос прямой D и, следовательно, есть возрастающее отображение.

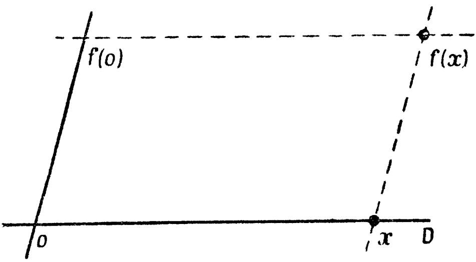

Рис. 6.

Если $f(D) \neq D$, то рассмотрим некоторую точку 0 прямой D; точка $f(0) \notin D$, и при любом $x \in D$ четверка $(0, x, f(x), f(0))$ образует параллелограмм (см. рис. 6). Следовательно, $\Delta(x, f(x)) \parallel \Delta(0, f(0))$. Ограничение отображения f на прямую D есть не что иное, как проекция на $f(D)$ параллельно $\Delta(0, f(0))$.

Таким образом (следствие 6.3), f есть изоморфизм или антиизоморфизм прямой D на $f(D)$ в зависимости от ориентации прямой $f(D)$. Следовательно, всегда можно так ориентировать $f(D)$, чтобы f было изоморфизмом.

Определение 16.2. Говорят, что две ориентированные прямые D *и* D' *параллельны и одинаково направлены* (обозначается $D \uparrow\uparrow D'$), если существует такой перенос f, который является изоморфизмом ориентированной прямой D на ориентированную прямую D'.

Предложение 16.3. 1. *Отношение* $\uparrow\uparrow$ *есть отношение эквивалентности на множестве ориентированных прямых плоскости* П.

2. *Для всякого направления* δ *множество* $\mathcal{D}'_\delta$ *ориентированных прямых направления* δ *есть объединение двух классов эквивалентности этого отношения; две ориентированные прямые, отвечающие одной и той же (неориентированной) прямой направления* δ, *принадлежат двум различным классам.*

Доказательство. 1. Это утверждение следует непосредственно из того факта, что отображение, обратное к некоторому изоморфизму (для отношения порядка), в свою очередь есть изоморфизм, равно как и произведение двух изоморфизмов есть изоморфизм.

2. Переносы действуют транзитивно на множестве $\mathcal{D}_\delta$; таким образом, из утверждения 16.1 следует, что $\mathcal{D}'_\delta$ представляет собой либо единственный класс, либо объединение двух различных классов. Однако для каждой ориентированной прямой D всякий перенос этой прямой есть изоморфизм; следовательно, никакой перенос не преобразует D в ту же самую прямую, обращая порядок на этой прямой. Таким образом, эти две ориентированные прямые принадлежат двум различным классам.

Следствие 16.4. *Если две ориентированные прямые* D, D' *параллельны и одинаково направлены, то всякий перенос, переводящий* D *в* D', *есть изоморфизм (по отношению порядка) прямой* D *на* D'.

Если две ориентированные прямые параллельны, но не одинаково направлены, то говорят, что они направлены противоположно.

Приложения

16.5. *Понятие ориентированного направления*

Ориентированные направления плоскости П суть классы эквивалентности, порожденные отношением эквивалентности $\uparrow\uparrow$ на множестве $\mathscr{D}'$ ориентированных прямых плоскости П.

16.6. *Образ луча при переносе*

Определим на множестве замкнутых лучей плоскости П отношение

$(A \sim B)$, если существует такой перенос f, что $f(A) = B$.

В этом случае A и B будем называть параллельными и одинаково направленными.

Легко видеть, что это отношение есть отношение эквивалентности.

Из определения луча и предложения 16.1 следует, как нетрудно показать, что при всяком переносе f образом произвольного луча с началом a будет некоторый луч с началом $f(a)$ и что

$(A \sim B) \Leftrightarrow$(ориентированные прямые, ассоциированные с A и B, параллельны и одинаково направлены).

16.7. *Образ отрезка при переносе*

Всякий отрезок $[a, b]$ есть пересечение лучей $D(a, b)$, $D(b, a)$; следовательно, для любого переноса f образ $f([a, b])$ есть пересечение лучей $D(f(a), f(b))$, $D(f(b), f(a))$, т. е. отрезок $[f(a), f(b)]$. Аналогичные утверждения справедливы и для интервалов (открытых и полуоткрытых).

Отсюда следует, что *образ всякого выпуклого множества при переносе есть также выпуклое множество.*

§ 4. СТРУКТУРА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА НА (П, 0)

17. Умножение на скаляр и его свойства

Напомним, что *векторным пространством* над полем R называется всякая коммутативная группа E с заданной на ней бинарной операцией $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$, называемой умножением на скаляр, которая отображает множество $R \times E$ в E так, что выполняются следующие условия, использующие как групповые свойства множества E, так и свойства поля R:

Для всех λ, $\mu \in R$ и всех x, $y \in E$

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \tag{1}$$

$$(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x, \tag{2}$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \tag{3}$$

$$1x = x. \tag{4}$$

До сих пор мы связывали с каждой центрированной плоскостью (П, 0) структуру коммутативной группы; нам остается определить умножение на скаляр. Это определение будет опираться на существование на каждой ориентированной прямой структуры векторного пространства.

Определение 17. 1. На центрированной плоскости (П, 0) отображение

$$(\lambda, x) \to \lambda x$$

множества $R \times \Pi$ в множество П определяется следующим образом:

1. $\lambda 0 = 0$.

2. Для любого $x \neq 0$ произведение x на скаляр λx есть результат умножения x на λ в векторном пространстве, задаваемом центрированной прямой $\Delta(0, x)$ с началом 0. Эта операция называется *умножением на скаляр* на центрированной плоскости (П, 0).

Свойства умножения на скаляр в системе (П, 0)

Проверим выполнение соотношений (2), (3), (4). Для $x = 0$ они очевидны.

Для $x \neq 0$ эти соотношения также выполняются, поскольку они касаются лишь векторного пространства, образованного центрированной прямой $\Delta(0, x)$ с началом 0 (см. следствие 3 предложения 9.1).

Заметим для дальнейшего, что $(-1)x = -x$ есть точка, противоположная точке x (относительно определенной выше операции сложения).

18. Линейность косой проекции

Для доказательства соотношения (1) нам понадобится лемма, которую во Франции принято именовать *леммой Фалеса.*

Лемма 18.1. *Пусть D — некоторая прямая, проходящая через 0, δ — некоторое направление, отличное от направления этой прямой, и φ — косая проекция на D параллельно δ.*

Тогда для всех $\lambda \in R$ и всех $x \in \Pi$

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x). \tag{5}$$

Покажем сначала, что это равенство справедливо для рациональных λ. При любом целом $n \geqslant 0$ из равенства $nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ раз}}$ следует, что

$$\varphi(nx) = n\varphi(x). \tag{6}$$

Так как $(-n)u = -(nu)$ и $\varphi(-u) = -\varphi(u)$, то соотношение (6) выполняется для всех $n \in Z$. Если x имеет вид $\frac{1}{n}y$ (где $n \neq 0$), то соотношение (6) принимает вид

$$\varphi(y) = n\varphi\left(\frac{1}{n}y\right), \quad \text{откуда} \quad \varphi\left(\frac{1}{n}y\right) = \frac{1}{n}\varphi(y).$$

Следовательно, для всех целых $p, q \neq 0$ и всех $x \in \Pi$

$$\varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \varphi\left(p\left(\frac{1}{q}x\right)\right) = p\varphi\left(\frac{1}{q}x\right) = p\left(\frac{1}{q}\varphi(x)\right) = \frac{p}{q}\varphi(x).$$

Таким образом, *для всех рациональных λ равенство* (5) *справедливо.*

Положим теперь $x \neq 0$ (случай $x = 0$ тривиален). Если прямая $\Delta(0, x)$ имеет направление δ, то $\varphi(\lambda x) = 0$ для всех λ, и, следовательно, равенство (5) удовлетворяется. В противном случае $\varphi(x) \neq 0$; введем порядок на прямых $\Delta(0, x)$ и D таким образом, чтобы на прямой $\Delta(0, x)$ выполнялось неравенство $0 < x$, а на прямой D — неравенство $0 < \varphi(x)$.

Отображение $\lambda \to \lambda x$ множества R на $\Delta(0, x)$ будет возрастающим. Отображение $y \to \varphi(y)$ прямой $\Delta(0, x)$

на прямую D также будет возрастающим (следствие 6.3). Значит, и отображение $\lambda \to \varphi(\lambda x)$ возрастающее, равно как и отображение $\lambda \to \lambda\varphi(x)$; однако мы показали, что эти отображения совпадают для всех рациональных λ; следовательно, они совпадают для всех $\lambda \in R$ (будем считать, что поле R обладает таким свойством). Иначе говоря, лемма доказана.

Следствие. *Для всех $\lambda \in R$ и всех x, $y \in \Pi$ имеет место равенство*

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y. \tag{1}$$

Доказательство. Если x и y принадлежат одной прямой, проходящей через 0, то равенство (1) выполняется, поскольку центрированная прямая $(D, 0)$ есть векторное пространство.

Пусть теперь прямые $\Delta(0, x)$ и $\Delta(0, y)$ различны. Для того чтобы убедиться в справедливости равенства (1), достаточно показать, что левая и правая части этого равенства имеют одинаковые составляющие в системе осей $(\Delta(0, x), \Delta(0, y))$.

Итак, пусть, например, φ — проекция на $\Delta(0, x)$ параллельно $\Delta(0, y)$. Из леммы 18.1 следует, что

$$\varphi(\lambda(x+y)) = \lambda\varphi(x+y) = \lambda x.$$

С другой стороны, поскольку $\lambda x \in \Delta(0, x)$ и $\lambda y \in \Delta(0, y)$, имеет место равенство

$$\varphi(\lambda x + \lambda y) = \lambda x.$$

Отсюда и следует искомое равенство (1).

19. Теорема о векторной структуре

Теорема 19.1. *Центрированная плоскость* (П, 0), *на которой заданы указанным выше образом операции сложения и умножения на скаляр, есть двумерное векторное пространство над R; его одномерные аффинные подпространства суть прямые плоскости* П.

Доказательство. Мы только что показали, что **(П, 0)** есть векторное пространство над R. С другой стороны, для всех $a \neq 0$ прямая $\Delta(0, a)$ есть не что иное, как множество точек λa плоскости Π (где $\lambda \in R$).

Наконец, $(\Pi, 0)$ есть прямая сумма двух произвольных несовпадающих прямых, проходящих через точку 0; следовательно, размерность пространства $(\Pi, 0)$ равна 2.

Как мы уже знаем, все прямые плоскости Π получаются переносом из прямых, проходящих через точку 0; следовательно, они образуют одномерные аффинные подпространства пространства Π.

Приложение 19.2. Теперь, когда на $(\Pi, 0)$ задана структура векторного пространства, из соотношения (5) леммы 18.1 и аддитивности проекции φ можно вывести следующее утверждение:

Косая проекция φ *центрированной плоскости* $(\Pi, 0)$ *на центрированную прямую* $(D, 0)$ *есть линейное преобразование.*

20. Базисы и координаты. Уравнение прямой

В соответствии с общим определением, справедливым для произвольных векторных пространств, **базисом** центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ называется пара (a_1, a_2) элементов множества Π, отличных от точки 0 и не коллинеарных с ней.

Каждый элемент x множества Π записывается единственным образом в виде

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2.$$

Скалярные величины ξ_1 и ξ_2 называются **координатами** точки x относительно базиса (a_1, a_2); легко видеть, что $\xi_1 a_1$ и $\xi_2 a_2$ есть составляющие точки x относительно системы осей $(\Delta(0, a_1), \Delta(0, a_2))$; обратно, если ξ_1, ξ_2 — произвольные скаляры, то точка x с координатами ξ_1, ξ_2 обозначается через (ξ_1, ξ_2).

1. Пусть D — прямая, параллельная $\Delta(0, a_2)$ и пересекающая прямую $\Delta(0, a_1)$ в точке, первая коорди-

ната которой равна α_1. Очевидно, что

$$(x \in D) \Leftrightarrow (\xi_1 = \alpha_1).$$

Аналогичный результат имеет место для прямых, параллельных $\Delta(0, a_1)$.

2. Пусть D — прямая, проходящая через точку 0 и отличная от $\Delta(0, a_1)$ и $\Delta(0, a_2)$; пусть, далее, $b = (\beta_1, \beta_2)$ — точка D, отличная от 0; тогда

$$(x \in D) \Leftrightarrow (x \text{ имеет вид } \lambda b, \text{ где } \lambda \in R) \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\beta_1} = \frac{\xi_2}{\beta_2}\right).$$

Отношение β_2/β_1 называется **угловым коэффициентом** прямой D относительно заданного базиса.

3. Пусть, наконец, D — произвольная прямая, пересекающая обе оси. Для каждой точки $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ прямой D прямая $(D - a)$ проходит через 0. Следовательно, обозначив через (β_1, β_2) точку прямой $(D - a)$, отличную от 0, получаем

$$(x \in D) \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1 - \alpha_1}{\beta_1} = \frac{\xi_2 - \alpha_2}{\beta_2}\right).$$

С помощью этого результата легко показать, что всякая прямая плоскости П имеет уравнение вида

$$u\xi_1 + v\xi_2 + w = 0,$$

где u, v не равны нулю одновременно, и обратно, всякое уравнение такого вида есть уравнение некоторой прямой.

21. Описание гомотетий

В процессе изучения группы (П, 0) мы охарактеризовали переносы $x \to x + a$ системы (П, 0), что позволило нам впоследствии доказать изоморфность групп (П, a) и (П, b) при любых a, b. Выясним теперь строение преобразований вида $x \to \lambda x$.

Определение 21.1. Для любой точки $0 \in П$ и любого скаляра $k \neq 0$ *гомотетией* с центром 0 и коэффициентом k называется отображение $H(0, k)$

плоскости П в себя, определяемое (в связанных с плоскостью (П, 0) обозначениях) как

$$x \to kx.$$

Для любого $X \subset \Pi$ множество всех точек kx, где $x \in X$, обозначается через kX.

Следующие свойства вытекают непосредственно из определения:

1. Произведение гомотетий $x \to kx$ и $y \to \frac{1}{k} y$ есть тождественное отображение; следовательно, $H(0, k)$ есть преобразование плоскости П, и обратным к нему будет преобразование $H\left(0, \frac{1}{k}\right)$.

2. Имеют место тождества

$$k(X + a) = kX + ka \quad \text{и} \quad k(X + Y) = kX + kY.$$

3. Если $k \neq 1$, то

$$(x = kx) \Leftrightarrow ((1 - k)x = 0) \Leftrightarrow (x = 0).$$

Следовательно, единственной неподвижной точкой любой гомотетии с коэффициентом $k \neq 1$ является ее центр.

Предложение 21.2. *Отображение f плоскости* П *в себя есть гомотетия с центром в точке* 0 *тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$ и для любой прямой D множество $f(D)$ есть прямая, параллельная D.*

Доказательство. 1. Пусть f — гомотетия $x \to kx$ с центром в точке 0. Тогда $f(0) = 0$ и для всякой прямой D, проходящей через 0, $f(D) = D$.

Если D — произвольная прямая, то, как известно, $D = D' + a$, где D' — прямая, проходящая через 0 и параллельная D, а a — некоторая (произвольная!) точка прямой D. Следовательно,

$$f(D) = kD = k(D' + a) = kD' + ka = D' + ka,$$

и $f(D)$ есть прямая, параллельная прямой D', а следовательно, и прямой D.

2. Наоборот: пусть f — такое отображение плоскости Π в себя, что $f(0) = 0$ и что $f(D)$ для всякой прямой D есть прямая, параллельная D.

Для всякой прямой D, проходящей через 0, $f(D) = D$; значит, для каждой точки $x \neq 0$ плоскости Π найдется такой скаляр λ_x, что $f(x) = \lambda_x x$; остается показать, что $\lambda_x \neq 0$ и что λ_x не зависит от x.

Пусть A, B — две различные произвольные прямые, проходящие через 0; так как $f(A) = A$, то на прямой A существует такая точка $a \neq 0$, что $f(a) \neq 0$, и следовательно, $\lambda_a \neq 0$; обозначим через g гомотетию $H(0, \lambda_a)$.

Рассмотрим произвольную точку $b \in B$; прямые B и $\Delta(a, b)$ пересекаются, и точкой их пересечения будет b; следовательно, образы этих прямых при отображении f пересекаются и точка их пересечения есть $f(b)$. Однако образами этих прямых будут прямая B и прямая, параллельная $\Delta(a, b)$, сдвинутая на $f(a) = \lambda_a a$; они совпадают с образами прямых B и $\Delta(a, b)$ при отображении g.

Таким образом,

$$f(b) = g(b) = \lambda_a b.$$

Иначе говоря, $\lambda_a = \lambda_b$ для всех $b \in B$; поменяв ролями A и B, получим, что $\lambda_a = \lambda_b$ для всех $a \in A$ и всех $b \in B$, т. е. что на множестве $A \cup B$ величина λ_x постоянна.

Следовательно, $\lambda_x = \lambda_y \neq 0$ для всех x, $y \neq 0$, т. е. $\lambda_x \neq 0$ и λ_x не зависит от x.

Но это нам и требовалось доказать.

Следствие 21.3. *На центрированной плоскости* $(\Pi, 0)$ *отображение* f

$$x \to k(x - a) + a \quad (\text{где } a \in \Pi \text{ и } k \in R^*)$$

есть гомотетия $H(a, k)$.

Действительно, f есть композиция переноса и гомотетии; следовательно, оно преобразует всякую прямую в прямую, ей параллельную; с другой стороны, $f(a) = a$ и, значит, f есть гомотетия с центром a.

Если $a=0$, то, очевидно, $f=H(0,k)$. Если $a\neq 0$, то прямая $\Delta(0,a)$ устойчива относительно отображения f и на этой прямой соотношение

$$y=k(x-a)+a$$

может быть представлено в виде $\overline{ay}=k\overline{ax}$; следовательно, коэффициент гомотетии равен k.

Это следствие может быть также сформулировано следующим образом.

Следствие 21.4. *Пусть (a,x), (b,y) — такие две пары точек плоскости* П, *что $\overrightarrow{ax}=\overrightarrow{by}$. Пусть x', y' — образы точек x и y соответственно при гомотетиях $H(a,k)$ и $H(b,k)$; тогда $\overrightarrow{ax'}=\overrightarrow{by'}$.*

Замечание. Предложение 21.2 можно дополнить следующим образом:

Всякая гомотетия с положительным (соответственно отрицательным) коэффициентом преобразует каждую ориентированную прямую в прямую, параллельную ей и одинаково направленную (соответственно противоположно направленную).

Это очевидно для прямых, проходящих через центр гомотетии; общий случай сводится к этому последнему применением двух переносов, сохраняющих направление.

22. Изоморфизм векторных пространств (П, 0)

Предложение 22.1. *Для любых $a, b\in$ П отображение $x\to f(x)$, где f — перенос, переводящий a в b, есть изоморфизм векторного пространства* (П, a) *на векторное пространство* (П, b).

Доказательство. Как мы уже знаем, f есть изоморфизм относительно групповой структуры этих пространств (предложение 14.1). Остается доказать, что

$$f(\lambda\cdot x)=\lambda * f(x),$$

где символами $\cdot$ и $*$ обозначены умножения на скаляр в (П, a) и (П, b). Но если сложение в (П, a) обозначить через $+$, то перенос f определяется равенством

$$f(u) = u + b;$$

следовательно,

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot x + b.$$

Произведение $\lambda * f(x)$ (в силу следствия 21.3) запишется в виде

$$\lambda * f(x) = \lambda \cdot (f(x) - b) + b = \lambda \cdot x + b,$$

откуда и следует искомое тождество.

23. Структура векторного пространства на множестве переносов

Пусть $0 \in П$; для любого $a \in (П, 0)$ обозначим через t_a перенос $x \to (x + a)$ центрированной плоскости (П, 0). Из предложения 14.1 следует, что отображение φ_0: $a \to t_a$ есть изоморфизм аддитивной группы (П, 0) на группу $\mathcal{T}$ переносов. Очевидно, отображение φ_0 единственным образом задает на $\mathcal{T}$ структуру векторного пространства так, чтобы φ_0 было изоморфизмом между векторными пространствами (П, 0) и $\mathcal{T}$ (путем перенесения структуры с (П, 0) на $\mathcal{T}$).

Определенная таким образом на $\mathcal{T}$ структура векторного пространства не зависит от выбора начальной точки 0; это непосредственно следует из предложения 22.1.

Пользуясь несколько иной терминологией, можно сказать, что мы задали на множестве свободных векторов плоскости П структуру векторного пространства; эта структура такова, что для любой точки $0 \in П$ отображение $x \to \overrightarrow{0x}$ определяет векторный изоморфизм центрированной плоскости (П, 0) на векторное пространство свободных векторов плоскости П.

§ 5. РАСТЯЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

24. Характеризация растяжений

Определение 24.1. *Растяжением* плоскости П называется всякое преобразование этой плоскости, записываемое в системе (П, 0) следующим образом:

$$x \to kx + a \qquad (k \neq 0 - \text{скаляр}).$$

Непосредственно из определения следует, что рассматриваемое преобразование имеет тот же вид на всякой центрированной плоскости (т. е. при любом выборе начала). Всякое такое преобразование есть, очевидно, произведение гомотетии и переноса.

Предложение 24.2. *Отображение f плоскости* П *в себя есть растяжение тогда и только тогда, когда для любой прямой D ее образ $f(D)$ есть прямая, параллельная D.*

Доказательство. Выберем на плоскости П начальную точку 0. Всякое преобразование f вида $x \to kx + a$ (где $k \neq 0$) есть произведение гомотетии и переноса и, следовательно, переводит всякую прямую в прямую, параллельную ей.

Обратно, пусть отображение f обладает этим свойством; отображение $x \to f(x) - f(0)$ оставляет неподвижной точку 0 и переводит всякую прямую в прямую, ей параллельную, а значит, это гомотетия с центром в точке 0 (предложение 21.2); если k — ее коэффициент, то

$$f(x) = kx + f(0).$$

Предложение 24.3. *Пусть f — растяжение $x \to kx + a$ плоскости* П *с началом* 0. *Если $k = 1$, то f — это перенос; если же $k \neq 1$, то f — это гомотетия с коэффициентом k.*

Действительнс, если $k \neq 1$, то уравнение $x = f(x)$ имеет единственное решение

$$x_0 = \left(\frac{1}{1-k}\right) a.$$

Следовательно, f — гомотетия $H(x_0, k)$ (следствие 21.3).

Величину k называют **коэффициентом** преобразования f.

Из равенства $x_0 = \left(\frac{1}{1-k}\right) a$ следует, что в некотором смысле (который легко может быть уточнен) перенос $x \to x + a$ есть предел гомотетий при стремлении их центров к бесконечности по направлению прямой $\Delta(0, a)$ и при стремлении их коэффициентов к 1.

25. Группа растяжений

Рассмотрим на центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ растяжение f (соответственно f')

$$x \to kx + a \text{ (соответственно } x \to k'x + a').$$

Легко видеть, что:

1. Обратным к преобразованию f будет растяжение $x \to \left(\frac{1}{k}\right) x - \left(\frac{1}{k}\right) a$.

2. Композиция растяжений $f' \circ f$ есть растяжение

$$x \to k'kx + (k'a + a')$$

с коэффициентом $k'k$.

3. $(f' \circ f = f \circ f') \Leftrightarrow (k'a + a' = ka' + a) \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow ((1-k)a' = (1-k')a).$$

Таким образом,

либо f или f' — тождественное преобразование;
либо f и f' — переносы;
либо $k \neq 1, k' \neq 1$ и $\frac{1}{(1-k)} a = \frac{1}{(1-k')} a'$, т. е. f и f' — гомотетии с общим центром.

4. Если существует такая прямая D, что $f(D) = D$ и $f'(D) = D$, то и $f' \circ f(D) = D$.

Следовательно, если f и f' — две гомотетии с центрами 0, $0'$ (причем $0 \neq 0'$), то $f' \circ f$ (и $f \circ f'$) есть либо гомотетия с центром, принадлежащим прямой $D = \Delta(0, 0')$, либо перенос в направлении, параллельном прямой D.

Аналогично, если f — гомотетия с центром 0 и f' — перенос $x \to x + a$ $(a \neq 0)$, то композиции $f' \circ f$ и

$f \circ f'$ будут гомотетиями, центры которых принадлежат прямой $\Delta(0, a)$.

Сформулируем кратко основные полученные результаты:

Предложение 25.1. *Растяжения плоскости* Π *образуют группу* $\mathcal{G}$ *преобразований; эта группа некоммутативна; два элемента группы* $\mathcal{G}$ *перестановочны только в том случае, когда это либо два переноса, либо две гомотетии с общим центром* *).

Отображение

$$f \to (\text{коэффициент преобразования } f)$$

есть представление группы $\mathcal{G}$ *в мультипликативной группе* R^* *поля* R.

26. Подгруппы группы растяжений

1. Для всех $a \in \Pi$ множество $\mathcal{H}(a)$ гомотетий с фиксированным центром a образует коммутативную подгруппу группы $\mathcal{G}$, изоморфную мультипликативной группе R^*. Всякой подгруппе M группы R^* соответствует, таким образом, некоторая подгруппа группы $\mathcal{H}(a)$:

Группе $M = \{1, -1\}$ соответствует группа, образованная тождественным преобразованием и симметрией относительно центра a (определяемой как $x \to 2a - x$).

Группе $M = R^*_+$ соответствует группа положительных гомотетий (гомотетий с коэффициентом $k > 0$) с центром a.

Упомянем еще группы $M = Q$ и $M = \{k^n\}_{n \in Z}$ (где $k \neq 0$).

2. Подгруппа $\mathcal{T}$ переносов и все ее подгруппы. Для изучения подгрупп группы $\mathcal{T}$ удобно воспользоваться изоморфизмом между группой $\mathcal{T}$ и аддитивной группой R^2. Подгруппам $Z \times \{0\}$, $Z \times Z$, $Z \times R$

*) Заметим, что тождественное преобразование $x \to x$ можно рассматривать как гомотетию с центром в произвольной точке a и коэффициентом 1 или как перенос на 0 (т. е. либо как преобразование $x \to 1 \cdot x$, либо как преобразование $x \to x + 0$).

группы R^2 соответствуют при этом изоморфизме интересные подгруппы группы $\mathcal{T}$; так, например, группе $Z \times Z$ при любом выборе точек $a, b \in \Pi$, неколлинеарных с точкой 0, соответствует группа переносов вида $(pa + qb)$, где $p, q \in Z$.

3. Пусть φ — каноническое представление группы $\mathcal{G}$ в R^*, определяемое как

$$f \to (\text{коэффициент преобразования } f).$$

Для всякой подгруппы M группы R^* множество $\varphi^{-1}(M)$ есть нормальный делитель группы $\mathcal{G}$.

Если $M = \{1\}$, то $\varphi^{-1}(M)$ есть группа переносов.

Если $M = \{1, -1\}$, то $\varphi^{-1}(M)$ есть группа переносов и центральных симметрий.

Если $M = R^*_+$, то $\varphi^{-1}(M)$ есть группа растяжений, сохраняющих направления ориентированных прямых.

27. Растяжения подмножеств множества П

По традиции в элементарной геометрии много внимания уделяется изучению пары гомотетичных треугольников; мы рассмотрим более общий случай растяжений произвольных частей плоскости П.

Лемма 27.1. *Для любых $u, v, u', v' \in \Pi$, таких, что*

$$u \neq v, \quad u' \neq v', \quad \Delta(u, v) \parallel \Delta(u', v'),$$

существует единственное растяжение f плоскости П, для которого $f(u) = u'$ и $f(v) = v'$.

Доказательство. 1. *Существование.* Пару (u, v) переведем переносом в пару (u', v''); далее, некоторая гомотетия с центром u' преобразует (u', v'') в (u', v'); произведение этих двух растяжений и будет искомым преобразованием.

2. *Единственность.* Если f, g — два преобразования, удовлетворяющие условиям леммы, то растяжение $f^{-1} \circ g$ оставит точки u и v на месте; представим его в виде $x \to kx + a$; тогда:

$$ku + a = u \text{ и } kv + a = v, \text{ откуда } (1 - k)(u - v) = 0.$$

Следовательно, $k = 1$ и $a = 0$; иначе говоря, $f^{-1} \circ g$ — тождественное преобразование, и значит, $f = g$.

Предложение 27.2. *Пусть X — некоторое подмножество множества Π, не принадлежащее целиком одной прямой, и пусть f — отображение множества X в Π. Если для всякой пары различных точек $x, y \in X$ точки $f(x)$ и $f(y)$ принадлежат прямой, параллельной $\Delta(x, y)$, то либо $f(X)$ есть единственная точка, либо f есть ограничение на множество X некоторого (однозначно определяемого) растяжения плоскости Π.*

Доказательство. *1-й случай.* Существуют по крайней мере две неподвижные точки a, b преобразования f.

Для любой точки $x \in X$, такой, что $x \notin \Delta(a, b)$, прямые $\Delta(a, x)$ и $\Delta(b, x)$ соответственно пересекаются с прямыми $\Delta(a, f(x))$ и $\Delta(b, f(x))$ и параллельны им, откуда следует, что $f(x) = x$.

Следовательно, f тождественно вне прямой $\Delta(a, b)$. Но по предположению в X найдется по крайней мере одна точка $c \notin \Delta(a, b)$. Рассуждая аналогичным образом, покажем, что f тождественно вне прямой $\Delta(a, c)$; следовательно, f тождественно всюду на X.

2-й случай. Предположим, что множество $f(X)$ не сводится к одной точке; тогда существуют две различные точки $a, b \in X$, для которых $f(a) \neq f(b)$; так как $\Delta(a, b) \parallel \Delta(f(a), f(b))$, то существует (лемма 27.1) такое растяжение g плоскости Π, что $g(a) = f(a)$ и $g(b) = f(b)$. Отображение $g^{-1} \circ f$ множества X в множество Π удовлетворяет условиям, описанным в формулировке предложения, и обладает двумя неподвижными точками a и b; следовательно, оно является тождественным на X. Иначе говоря, отображение f есть ограничение растяжения g на множество X. Единственность отображения g следует, например, из приведенной выше леммы 27.1.

Замечание. Очевидно, что если X принадлежит одной прямой, то всякое отображение f множества X в некоторую прямую, параллельную прямой, содержащей X, обладает всеми свойствами, указанными в формулировке предложения. Таким образом, условие «X не принадлежит одной прямой» в формулировке предложения 27.2 существенно.

§ 6. ВОЗМОЖНЫЕ ПУТИ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИЗУЧЕНИЯ АФФИННОЙ СТРУКТУРЫ

28. Некоторые темы для дальнейшего изучения

1. *Аффинные преобразования плоскости*: это, по определению, преобразования вида $x \to l(x) + a$, где l — такое линейное отображение $(\Pi, 0)$ в себя, что

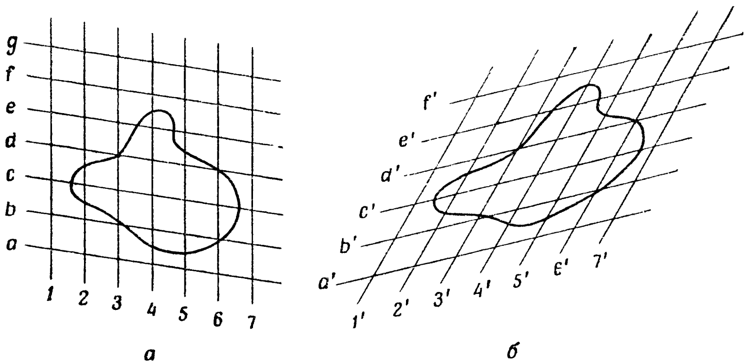

Рис. 7.

$(l(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$. Можно показать, что множество аффинных преобразований совпадает с множеством преобразований плоскости Π, переводящих каждую прямую снова в прямую *).

2. Более общий объект изучения представляют собой *аффинные отображения плоскости* Π *в другую плоскость* Π'.

Интуитивное представление о таких преобразованиях легко получить с помощью (вообще говоря,

*) См., например, Яглом И. М. и Ашкинузе В. Г., Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. I, М., «Просвещение», 1962, § 2, гл. I.

косоугольной) координатной сетки на плоскости П и ее образа в плоскости П′ при преобразовании f (см. рис. 7). К тому же физический мир предлагает нам многочисленные иллюстрации такого отображения, например: тень на полу от оконной рамы, освещенной солнцем; проекция некоторой вертикальной плоскости на горизонтальную плоскость; шарнирная сетка и ее деформации.

3. *Аффинные отображения плоскости на прямую* и линейные формы; *аффинные отображения поля* R *в плоскость* П (параметризации прямых плоскости П).

4. *Центр тяжести*; его инвариантность относительно любого аффинного преобразования; приложение к изучению выпуклых множеств.

29. Косая симметрия

Покажем на примере, как с помощью очень простых средств можно подойти к изучению косой симметрии.

Определение 29.1. Пусть A — некоторая прямая и δ — некоторое направление, отличное от направления прямой A. *Косой симметрией* параллельно δ (или в направлении δ) с осью A (или относительно A) называют отображение f плоскости П в себя, определенное следующим образом:

Для всех $x \in$ П точка $f(x)$ расположена на прямой направления δ, проходящей через точку x, причем середина пары $(x, f(x))$ принадлежит прямой A.

Очевидно, что f^2 — тождественное преобразование; следовательно, f — инволютивное преобразование плоскости П.

Пусть B — произвольная прямая направления δ, пересекающая A в точке 0. Обозначим через x_1, x_2 составляющие некоторой точки x плоскости П в системе осей (A, B). Тогда составляющими точки $f(x)$ будут точки x_1 и $-x_2$ (отсюда следует, что f — линейное преобразование центрированной плоскости (П, 0)); аналогично, если g — косая симметрия параллельно прямой A с осью B, то составляющими образа $g(x)$ будут $-x_1$ и x_2.

Отсюда следует, что композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ суть не что иное, как отображение

$$(x_1, x_2) \to (-x_1, -x_2),$$

т. е. центральная симметрия h с центром 0 (или симметрия относительно 0).

Обратно, если произведение двух косых симметрий есть симметрия с центром 0, то очевидно, что эти косые симметрии связаны описанным выше образом с парой пересекающихся в точке 0 прямых; такие две симметрии называются сопряженными.

Отношение

$$g \circ f = f \circ g = h$$

может быть записано также в виде

$$g = f \circ h = h \circ f;$$

следовательно, *произведение косой симметрии с осью D и центральной симметрии, центр которой принадлежит D, есть косая симметрия, сопряженная с первой.*

Предложение 29.2. *Всякая косая симметрия переводит прямую в прямую.*

Доказательство. Пусть в принятых выше обозначениях (a, b) — такой базис системы $(\Pi, 0)$, что $a \in A$, $b \in B$.

Уравнение любой прямой D плоскости Π имеет вид

$u\xi + v\eta + w = 0$ (где u и v не равны 0 одновременно).

Но симметрия f есть отображение $(\xi, \eta) \to (\xi, -\eta)$; поэтому уравнение образа $f(D)$ имеет вид $u\xi - v\eta + w = 0$, и следовательно, $f(D)$ есть прямая.

Отсюда следует, что произведение косых симметрий есть аффинное преобразование плоскости Π; можно показать (см. упражнения), что множество таких произведений совпадает с группой эквиаффинных преобразований, т. е. аффинных преобразований с детерминантом $+1$ или -1 (аффинных преобразований, сохраняющих площадь); эта группа играет в множестве аффинных преобразований роль, аналогичную роли подгруппы движений группы преобразований подобия. Другими словами, *всякое аффинное преобразование есть произведение* (положительной) *гомотетии и косых симметрий.*

Упражнения к главе II

1. Пусть A — подмножество плоскости Π, центр симметрии которого есть точка 0; показать, что если всякая прямая D, проходящая через 0, пересекает A в конечном числе $n_0 > 0$ точек, то 0 — единственный центр симметрии множества A.

2. Пусть A — подмножество плоскости Π, обладающее центром симметрии, а f — растяжение Π; показать, что существует еще одно растяжение $g \neq f$, такое, что $f(A) = g(A)$.

3. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — конечная последовательность точек плоскости Π; найти такие последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что серединой каждой пары (x_i, x_{i+1}) служит точка a_i (при соглашении: $x_{n+1} = x_1$).

4. Пусть A — произвольное подмножество плоскости Π. Показать, что множество X центров симметрий множества A симметрично относительно каждого из них; показать, что множество X замкнуто, если множество A замкнуто. Найти все замкнутые множества X на плоскости Π, симметричные относительно каждой своей точки.

5. Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — направления трех попарно различных прямых, и пусть A, B — две прямые, направления которых отличны от δ_1.

Для каждой прямой D_1 направления δ_1 обозначим через D_2 прямую направления δ_2, проведенную через точку $A \cap D_1$, и через D_3 — прямую направления δ_3, проведенную через точку $B \cap D_1$.

Положим $f(D_1) = D_2 \cap D_3$. Каково множество точек $f(D_1)$?

6. Пусть (A, B), (A', B') — две пары прямых, таких, что $A \parallel A'$ и $B \parallel B'$. Найти все растяжения, переводящие $A \cup B$ в $A' \cup B'$.

7. Пусть A, B — два ограниченных отличных от точки подмножества плоскости Π. Показать, что существует не более двух растяжений f плоскости Π, таких, что $f(A) = B$.

8. Пусть f — отображение плоскости Π в себя и δ — некоторое направление. Показать, что если для всех $x, y \in \Pi$, таких, что $x \neq y$, точки $f(x), f(y)$ принадлежат прямой, параллельной

$\Delta(x, y)$, и если для любой точки $x \in \Pi$ точки $x, f(x)$ принадлежат некоторой прямой направления δ, то отображение f есть перенос.

9. Растяжения R:

a) Отождествим растяжение $x \to kx + a$ плоскости Π с точкой (k, a) множества R^2; группа $\mathcal{G}$ растяжений плоскости Π отождествится тем самым с некоторым подмножеством множества R^2; читателю предлагается полностью разобрать этот вопрос. Зададим на группе $\mathcal{G}$ топологию, индуцированную на ней топологией пространства R^2 при таком отождествлении. Что будет образами в пространстве R^2 подгрупп группы $\mathcal{G}$, образованных: 1) гомотетиями с центром в точке 0? 2) переносами?

b) Показать, что если некоторая подгруппа $\mathcal{G}'$ группы $\mathcal{G}$ содержит гомотетию $H(x_0, k)$ с коэффициентом $k \neq 1, -1$ и такое растяжение f, что $f(x_0) \neq x_0$, то множество центров гомотетий из группы $\mathcal{G}'$, коэффициент которых равен k, всюду плотно в R. Пользуясь этим, показать, что если $\mathcal{G}'$ замкнуто, то оно содержит все переносы пространства R.

10. Показать, что детерминант всякой косой симметрии плоскости Π равен -1. Показать, что всякое аффинное преобразование плоскости Π, детерминант которого равен ± 1, есть произведение 3 или 4 косых симметрий (доказательство аналогично доказательству теоремы 45.6).

11. Найти все замкнутые группы линейных преобразований центрированной плоскости $(\Pi, 0)$, однотранзитивные на множестве $\Pi \setminus \{0\}$.

ГЛАВА III

АКСИОМЫ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

§ 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

30. Аксиома перпендикулярности

Формулируя аксиому III, мы использовали понятие расстояния; но расстояние было введено в рассмотрение лишь для того, чтобы несколько упростить задание аффинной структуры на прямых, и плоскость, определяемая аксиомами I, II, III, не обладает метрической структурой в полном смысле этого слова: на каждой прямой плоскости Π задана некоторая метрика, но метрики различных прямых не согласованы, не связаны между собой никакой аксиомой перехода; аксиома $\mathrm{III_b}$ вводит лишь понятие середины отрезка, и, следовательно, носит чисто аффинный характер.

Этот факт можно подчеркнуть следующим замечанием:

Пусть Π — плоскость, удовлетворяющая аксиомам I, II, III, и пусть d — расстояние на этой плоскости; рассмотрим произвольное отображение f множества $\mathscr{D}$ прямых плоскости Π в интервал $[0, \infty[$.

Для всех $x \in \Pi$ положим $d'(x, x) = 0$. Для всех $x, y \in \Pi$, таких, что $x \neq y$, положим

$$d'(x, y) = k_{x, y}\, d(x, y), \text{ где } k_{x, y} = f(\Delta(x, y)).$$

Очевидно, что плоскость Π, на которой задано расстояние d', также удовлетворяет аксиомам I, II, III и обладает той же аффинной структурой, что и плоскость Π с расстоянием d, хотя расстояние на каждой прямой умножается на некоторый положительный скалярный множитель, зависящий от выбора прямой.

Теперь мы попытаемся установить связь между метриками на различных прямых с помощью ортогональных проекций; для этого мы должны сначала уточнить понятие перпендикулярности прямых.

Аксиома IV$_a$ (о перпендикулярах). *Перпендикулярность* (обозначается через $\perp$) *есть бинарное отношение на множестве* $\mathcal{D}$ *прямых плоскости* Π, *такое, что:*

1) $(A \perp B) \Leftrightarrow (B \perp A)$ (*симметричность отношения* $\perp$);

2) $(A \perp B) \Rightarrow$ (*A и B не параллельны*);

3) *Для всякой прямой A существует по крайней мере одна такая прямая B, что $A \perp B$*;

4) *Для любой пары* (A, B), *такой, что* $(A \perp B)$, *справедлива эквивалентность*

$$(B \parallel B') \Leftrightarrow (A \perp B').$$

31. Перпендикулярность двух направлений

Мы говорим, что два направления δ и δ' перпендикулярны, и пишем $\delta \perp \delta'$, если существуют такие две прямые D, D' направлений δ и δ' соответственно, что $D \perp D'$.

Тем самым мы определили бинарное отношение на множестве $\mathbf{D}$ направлений; из аксиомы IV$_a$ следует, что это отношение обладает следующими свойствами P':

1. Симметричность;
2. Антирефлексивность ($\delta \perp \delta$ невозможно);
3. Для всякого направления δ существует единственное направление δ', такое, что $\delta \perp \delta'$ (существование и единственность).

Другими словами,

$(D \perp D') \Leftrightarrow$(направление прямой D $\perp$ направлению прямой D').

Легко убедиться, что и обратно, всякое бинарное отношение на множестве $\mathbf{D}$ направлений, обладающее свойствами P', есть отношение, порожденное некоторым отношением перпендикулярности на множестве $\mathscr{D}$ прямых (D и D' считаются перпендикулярными, если направления прямых D и D' перпендикулярны).

Общность отношения перпендикулярности

Только что изложенное позволяет оценить степень общности отношений перпендикулярности на $\mathscr{D}$, удовлетворяющих аксиоме $\mathrm{IV_a}$. Действительно, задание на $\mathscr{D}$ такого отношения эквивалентно заданию на $\mathbf{D}$ некоторого отношения, обладающего свойствами P'; а это все равно, что задать некоторое разбиение множества $\mathbf{D}$ на подмножества, каждое из которых содержит в точности два элемента (образующие пару перпендикулярных направлений).

В связи с такой чрезвычайной общностью аксиома $\mathrm{IV_a}$ ничего не дает для изучения метрических свойств плоскости, если эту аксиому не дополнить аксиомой $\mathrm{IV_b}$, которая вводит в рассмотрение расстояния; последней аксиоме, несмотря на то что она очень проста, каким-то сверхъестественным образом удается одним ударом исключить возможные особенности метрики и перпендикулярности.

Комментарий. В аксиоме $\mathrm{IV_a}$ перпендикулярность вводится как исходное понятие; мы полагаем, что это не вызовет трудностей при преподавании, поскольку ученики уже встречались с различными аспектами этого понятия: лист бумаги в клетку, горизонтальное и вертикальное направления, кратчайшее расстояние от точки до прямой и т. д.

32. Аффинные свойства, имеющие вид метрических

Несмотря на свой весьма общий характер, аксиома $\mathrm{IV_a}$ позволяет без особого труда формулировать многие результаты, которые обычно формулируются на более поздних стадиях изучения геометрии:

1. *Всякое растяжение сохраняет перпендикулярность прямых.*

Более точно, для всякого растяжения f

$$(D \perp D') \Rightarrow (f(D) \perp f(D')).$$

Это очевидно, поскольку $D \parallel f(D)$ и $D' \parallel f(D')$.

2. Назовем **осевой симметрией с осью** D (или **симметрией относительно прямой** D) косую симметрию с осью D параллельно направлению, перпендикулярному к направлению прямой D. Тогда имеет место

Предложение 32.1. *Произведение двух симметрий относительно перпендикулярных прямых D, D' есть центральная симметрия с центром в точке $D \cap D'$.*

Действительно, это есть частный случай предложения о двух сопряженных косых симметриях, следовательно, этот факт выражает чисто аффинное свойство плоскости, хоть формулировка его такова, что может создать впечатление о метрической его природе.

33. Коэффициент проекции пары лучей с общим началом

Пусть D — произвольная прямая; назовем **ортогональной проекцией на** D косую проекцию на D параллельно направлению, перпендикулярному направлению прямой D.

Пусть теперь A_1, A_2 — два луча с началом в точке 0 и D_1, D_2 — содержащие их прямые, ориентированные таким образом, что $A_1 \geqslant 0$ и $A_2 \geqslant 0$.

Для каждой точки $x \in D_1$ обозначим через $\overline{0x}$ ориентированное расстояние $d(0, x)$ на ориентированной прямой D_1; аналогичные обозначения введем для прямой D_2.

Пусть φ — ортогональная проекция на D_1, а a — такая точка луча A_2, что $\overline{0a} = 1$. Известно, что при любом $\lambda \in R$

$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a).$$

Следовательно, поскольку все $x \in D_2$ имеют вид λa, отношение $\overline{0\varphi(x)}/\overline{0x}$, определенное для всех $x \neq 0$, не зависит от x и равно $\overline{0\varphi(a)}$, поэтому можно ввести

Определение 33.1. В принятых выше обозначениях *коэффициентом проекции луча* A_2 *на луч* A_1 называется число k (обозначаемое через $c(A_1, A_2)$), такое, что для всех $x \in D_2$

$$\overline{0\varphi(x)} = k\overline{0x}.$$

Таким образом, $c(A_1, A_2) = \overline{0\varphi(a)}$.

Непосредственно из определения следует, что

$$(c(A_1, A_2) = 0) \Leftrightarrow (\varphi(a) = 0) \Leftrightarrow (A_1 \perp A_2)$$

(где запись $A_1 \perp A_2$ означает, что $D_1 \perp D_2$).

Если $A_1 = A_2$, то $c(A_1, A_2) = 1$; если A_1 и A_2 противоположно направлены, то $c(A_1, A_2) = -1$; однако доказать обратное, пользуясь только аксиомой IVa, невозможно.

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

34. Аксиома симметрии

Аксиома IVb. *Для любой пары* (A_1, A_2) *лучей с общим началом имеет место равенство*

$$c(A_1, A_2) = c(A_2, A_1).$$

Приведем эквивалентную формулировку этой аксиомы, более элементарную, но менее поучительную:

Пусть $(0, a, b)$ — *произвольная тройка точек, не принадлежащих одной прямой и таких, что* $d(0, a) = d(0, b)$; *обозначим через* a' *и* b' *ортогональные проекции точек* a *и* b *на прямые* $\Delta(0, b)$ *и* $\Delta(0, a)$ *соответственно; тогда, если прямые* $\Delta(0, b)$ *и* $\Delta(0, a)$ *ориентированы так, что* $0 \leqslant b$ *и соответственно* $0 \leqslant a$, *то на этих прямых* $\overline{0a'} = \overline{0b'}$.

35. Норма и скалярное произведение

Определение 35.1. На центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ *нормой точки* x (где $x \in \Pi$) называется положительное число $\| x \| = d(0, x)$.

Непосредственно из определения следует, что норма $\| x \|$ равна 0 только для $x = 0$ и что для любого числа λ

$$\| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|,$$

откуда, в частности, вытекает, что

$$\| -x \| = \| x \|.$$

Определение 35.2. На центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ *скалярным произведением* $x \cdot y$ *векторов* x и y называется действительное число, определяемое следующим образом:

1. Если хотя бы один из векторов x, y равен 0, то

$$x \cdot y = 0.$$

2. Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то

$$x \cdot y = \| x \| \cdot \| y \| \cdot c(X, Y), \text{ где } X = \Delta(0, x), \; Y = \Delta(0, y).$$

Часто бывает удобно обозначать число $x \cdot x$ через x^2.

Непосредственные следствия.

1. Отношение $x \cdot y = 0$ эквивалентно следующему: либо один из векторов x, y равен 0, либо $X \perp Y$.

Для удобства часто уславливаются считать, что два вектора x, y центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ перпендикулярны (обозначается $x \perp y$) в том случае, когда один из векторов x, y равен 0, или $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $X \perp Y$. При такой договоренности получаем

$$(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow (x \perp y).$$

2. Пусть D — произвольная ориентированная прямая, содержащая 0 и x; обозначим через φ ортогональную проекцию на D; тогда

$$x \cdot y = \overline{0x} \cdot \overline{0\varphi(y)}.$$

Это равенство, очевидно, удовлетворяется, если хотя бы один из векторов x, y равен 0; в противном случае ввиду того, что изменение ориентации не влияет на величину $\overline{0x} \cdot \overline{0\varphi(y)}$, достаточно доказать это равенство для случая, когда D есть ориентированная прямая $\Delta(0, x)$. Тогда

$$\overline{0x} = \| x \| \text{ и } \overline{0\varphi(y)} = \| y \| c(X, Y),$$

откуда и следует искомое равенство.

Обозначения. На центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ иногда бывает удобно обозначать $c(X, Y)$ через $c(x, y)$; это последнее обозначение, очевидно, не имеет смысла в случае $x = 0$ или $y = 0$.

Теорема 35.3. *Отображение $(x, y) \to x \cdot y$ множества $(\Pi, 0) \times (\Pi, 0)$ в множество R симметрично и билинейно.*

Кроме того, оно положительно в том смысле, что $x \cdot x > 0$ для всех $x \neq 0$; точнее: для любого x

$$x \cdot x = \| x \|^2.$$

Доказательство. 1. Равенство $x \cdot y = y \cdot x$ очевидно, если один из этих векторов равен 0; в противном случае оно вытекает из определения 35.2 и из равенства $c(X, Y) = c(Y, X)$, т. е. из аксиомы $\mathrm{IV_b}$.

2. Для любого фиксированного x отображение $y \to x \cdot y$ центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ в множество R линейно:

Если $x = 0$, то это очевидно, поскольку в этом случае $x \cdot y = 0$ для любого y;

Если $x \neq 0$, то пусть φ — ортогональная проекция на ориентированную прямую $\Delta(0, x)$; тогда отображение $y \to \varphi(y)$ центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ на прямую $\Delta(0, x)$ с началом 0 линейно; так как отображение $u \to \overline{0u}$ прямой $\Delta(0, x)$ в R также линейно, то и композиция $y \to \overline{0\varphi(y)}$ также будет линейным отображением, а значит, и

$$y \to \overline{0x} \cdot \overline{0\varphi(y)} = x \cdot y$$

линейно.

Так как $x \cdot y = y \cdot x$, то билинейность скалярного произведения тем самым доказана.

3. Равенство $x \cdot x = \| x \|^2$ следует непосредственно из определения скалярного произведения.

36. Тождества и неравенства

1. Билинейность и симметричность скалярного произведения удобны при вычислениях: так, например, имеет место тождество

$$\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \cdot \left(\sum_j \beta_j y_j\right) = \sum_{i, j} \alpha_i \beta_j x_i \cdot y_j \qquad (\alpha_i, \beta_j \in R).$$

Отсюда, в частности, получаем классические тождества

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b,$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b,$$

сложение и вычитание которых дает

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2),$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4a \cdot b.$$

2. Из свойств скалярного произведения легко получить одно важное неравенство.

Пусть x, y — два вектора из $(\Pi, 0)$, причем $x, y \neq 0$; тогда для любого числа λ

$$(\lambda x - y)^2 = \lambda^2 x^2 - 2\lambda x \cdot y + y^2 \geqslant 0.$$

Этот трехчлен второй степени относительно λ *положителен при любом* λ; следовательно, его дискриминант $\leqslant 0$ *); другими словами, для любых x, y

$$(x \cdot y)^2 \leqslant x^2 \cdot y^2, \quad \text{или} \quad |x \cdot y| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Равенство здесь имеет место лишь в том случае, когда трехчлен относительно λ может обратиться в 0, т. е. если существует такое λ, что $y = \lambda x$; последнее равенство означает, что $0, x, y$ принадлежат одной прямой.

Резюмируем:

$|x \cdot y| < \|x\| \cdot \|y\|$, если $0, x, y$ не принадлежат одной прямой;

$$x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\|, \quad \text{если } y = \lambda x \text{ и } \lambda > 0;$$
$$x \cdot y = -\|x\| \cdot \|y\|, \quad \text{если } y = \lambda x \text{ и } \lambda < 0.$$

*) Ибо дискриминант положительного при любых λ многочлена 2-й степени относительно λ должен быть отрицателен.

Легко видеть, что если $x = 0$ или $y = 0$, то выполняются оба последних равенства. Соотношение $x \cdot y = \| x \| \cdot \| y \| \, c(x, y)$ дает возможность представить эти результаты как

Предложение 36.1. *Для любых векторов x, y из* $(\Pi, 0)$ *при* $x \neq 0$ *и* $y \neq 0$:

$(|c(x, y)| < 1) \Leftrightarrow$ (*0, x, y не принадлежат одной прямой*);

$(c(x, y) = 1) \Leftrightarrow$ (*лучи $D(0, x)$ и $D(0, y)$ совпадают*);

$(c(x, y) = -1) \Leftrightarrow$ (*лучи $D(0, x)$ и $D(0, y)$ противоположны*).

37. Инвариантность расстояния и скалярного произведения относительно переноса

Скалярное произведение, которое мы только что рассмотрели, связано с выбором некоторого начала в плоскости П. Мы хотим показать, что в некотором смысле (который мы уточним ниже) оно не зависит от выбора этого начала.

Чтобы придать доказательству бóльшую наглядность, мы будем исходить в нашем доказательстве из инвариантности расстояния.

Определение 37.1. *Прямоугольником* называется такой параллелограмм (a, b, a', b') центрированной плоскости (Π, a), что $b \cdot b' = 0$ (последнее условие может быть также записано в виде $b \perp b'$).

Лемма 37.2. *Во всяком прямоугольнике длины противоположных сторон равны.*

Доказательство (см. рис. 8). На центрированной плоскости (Π, a)

$$a' = b + b' \quad \text{и} \quad b \perp b',$$

откуда

$$a'^2 = (b + b')^2 = b^2 + b'^2 + 2b \cdot b' = b^2 + b'^2$$

и

$$d^2(a, a') = d^2(a, b) + d^2(a, b').$$

То же рассуждение остается в силе для всех остальных вершин прямоугольника; воспользуемся

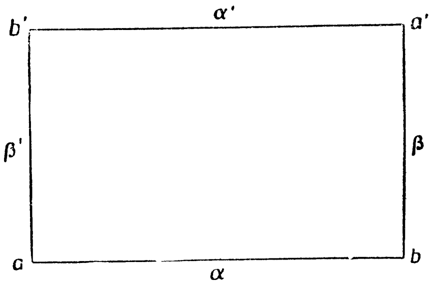

Рис. 8.

этим и, употребляя обозначения, указанные на рис. 8, получим

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha'^2 + \beta'^2; \quad \alpha^2 + \beta'^2 = \alpha'^2 + \beta^2.$$

Складывая и вычитая эти равенства, имеем

$$\alpha^2 = \alpha'^2 \quad \text{и} \quad \beta^2 = \beta'^2,$$

что и требовалось доказать.

Эта лемма допускает также следующую формулировку:

Для всякой прямой D и всякого переноса f в направлении, перпендикулярном этой прямой, ограничение отображения f на прямую D есть движение (т. е. сохраняет расстояния). В более общем случае имеем:

Предложение 37.3. *Всякий перенос есть движение.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \Pi$, и пусть f — перенос $u \to u + a$ плоскости $(\Pi, 0)$; требуется доказать, что

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Случай $x = y$ тривиален.

При $x \neq y$ предложение справедливо, если перенос f производится в направлении, параллельном прямой $\Delta(x, y)$ (потому что f в этом случае оставляет неподвижной прямую $\Delta(x, y)$) или перпендикулярном этой прямой (см. предыдущую лемму).

Пусть теперь a_1, a_2 — составляющие точки a на двух прямых, проходящих через 0 и соответственно параллельных и перпендикулярных прямой $\Delta(x, y)$, и пусть f_i — перенос $u \to u + a_i$ $(i = 1, 2)$.

Перенос f есть произведение переносов f_1, f_2 соответственно в направлениях, параллельном и перпендикулярном прямой $\Delta(x, y)$; следовательно, расстояния между парами точек (x, y) и $(f(x), f(y))$ равны.

Следствие 37.4. *На центрированной плоскости* $(\Pi, 0)$ *для всех* $x, y \in \Pi$

$$d^2(x, y) = \| y - x \|^2 = (x - y)^2.$$

Действительно, в системе $(\Pi, 0)$ предложение 37.3 принимает вид

$$d(x, y) = d(x + a, y + a)$$

для всех a.

В частности, при $a = -x$ получаем

$$d(x, y) = d(0, y - x) = \| y - x \|.$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость следствия.

Предложение 37.5. *При любых* $a, b \in \Pi$, *если* «$\cdot$» *и* «$\circ$» — *символы скалярного произведения векторов соответственно в* (Π, a) *и* (Π, b), *то для всех* $x, y \in \Pi$

$$x \cdot y = f(x) \circ f(y),$$

где f — *перенос, переводящий* a *в* b.

Действительно, равенство

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2x \cdot y$$

показывает, что $x \cdot y$ может быть выражено через скалярные квадраты, а следовательно, и через расстояния, но f сохраняет расстояния, и значит,

$$x \cdot x = f(x) \circ f(x); \quad y \cdot y = f(y) \circ f(y);$$
$$(x+y) \cdot (x+y) = (f(x)+f(y)) \circ (f(x)+f(y)).$$

Отсюда легко выводится справедливость предложения.

Из предложений 22.1 и 37.5 следует, что перенос f есть изоморфизм векторного пространства (Π, a) со скалярным произведением на векторное пространство (Π, b).

38. Скалярное произведение в векторном пространстве переносов

В п. 23 мы определили структуру векторного пространства на множестве $\mathscr{T}$ свободных векторов (или переносов) плоскости Π таким образом, чтобы для всякой точки $0 \in \Pi$ отображение $x \to \overrightarrow{0x}$ было бы векторным изоморфизмом системы $(\Pi, 0)$ на $\mathscr{T}$.

При фиксированной точке 0 это отображение задает, очевидно (путем перенесения структуры), скалярное произведение на множестве $\mathscr{T}$; из предложения 37.5 следует, что это скалярное произведение не зависит от выбора начальной точки 0. Оно может быть охарактеризовано тем, что для любого $0 \in \Pi$

$$x \cdot y = \overrightarrow{0x} \cdot \overrightarrow{0y},$$

где скалярные произведения слева и справа взяты соответственно в $(\Pi, 0)$ и $\mathscr{T}$.

Такие выражения, как $\overrightarrow{ab} \cdot \overrightarrow{xy}$ отныне имеют, следовательно, четкий смысл. Заметим, что иногда бывает удобно в том случае, когда в плоскости Π выбрана некоторая начальная точка 0, пользоваться одновременно обозначениями, сохраняющими смысл для центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ и для пространства $\mathscr{T}$, что равносильно отождествлению этих двух множеств с помощью отображения $x \to \overrightarrow{0x}$.

Например, мы будем писать

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{0y} - \overrightarrow{0x} = y - x,$$

$$d^2(x, y) = (\overrightarrow{xy})^2 = (y - x)^2 = y^2 - 2x \cdot y + x^2.$$

§ 3. ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

39. Метрические соотношения в параллелограмме и треугольнике

Предложение 39.1. a) *Во всяком параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.*

b) *Параллелограмм тогда и только тогда является прямоугольником, когда его диагонали равны.*

Доказательство. Для простоты примем за начальную точку 0 одну из вершин; тогда параллелограмм будет иметь вид $(0, x, x + y, y)$.

Тождество

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

выражает первое свойство, которое нам надо доказать. Далее из тождества

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4x \cdot y$$

следует, что

$$(\| x + y \| = \| x - y \|) \Leftrightarrow (x \cdot y = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((0, x, x + y, y) \text{ есть прямоугольник}).$$

Предложение 39.2. *Пусть (a, b, c) — произвольный треугольник плоскости Π, такой, что $a \neq b$ и $a \neq c$; пусть α, β, γ — его соответственные стороны и k — коэффициент проекции лучей $D(a, b)$, $D(a, c)$. Тогда*

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2k\beta\gamma.$$

В частности,

$$(\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2) \Leftrightarrow (D(a, b) \perp D(a, c)).$$

Действительно, в плоскости (Π, a) можно записать
$\alpha^2 = d^2(b, c) = (c-b)^2 = c^2 + b^2 - 2c \cdot b = \beta^2 + \gamma^2 - 2k\beta\gamma$.

С другой стороны, поскольку $\beta\gamma \neq 0$,

$$(k\beta\gamma = 0) \Leftrightarrow (k = 0) \Leftrightarrow (D(a, b) \perp D(a, c)).$$

В этом предложении читатель легко узнает теорему Пифагора; в приложении 1 мы дадим также доказательство этой теоремы, не использующее в явной форме скалярное произведение.

Предложение 39.3. *Для всех* $x, y \in (\Pi, 0)$

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|.$$

Равенство здесь достигается лишь в случае $x \in [0, y]$ *или* $y \in [0, x]$.

Доказательство. Случай $x = 0$ или $y = 0$ тривиален; будем считать поэтому, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Положим

$$\alpha = \| x \|, \quad \beta = \| y \|, \quad \gamma = \| x + y \|.$$

Имеем

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta c(x, y) \leqslant \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2,$$

где равенство имеет место лишь в случае $c(x, y) = 1$. Иначе говоря, $\gamma \leqslant \alpha + \beta$ и равенство имеет место только тогда, когда $x \in [0, y]$ или $y \in [0, x]$.

Следствие 39.4. *Для всех* $x, y, z \in \Pi$

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y);$$

равенство здесь достигается лишь при $z \in [x, y]$.

Действительно, на центрированной плоскости (Π, z) искомое соотношение записывается так:

$$\| x - y \| \leqslant \| x \| + \| y \|.$$

Требуемое неравенство получается теперь из предложения 39.3 заменой y на $-y$.

Можно также доказать это следствие, исходя непосредственно из соотношения

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta c(x,\ y)\leqslant\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2,$$

в котором равенство имеет место лишь при $c(x,y)=-1$, т. е. при $0\in[x,y]$.

Предложение 39.5. *Для всякой тройки* (α,β,γ) *неотрицательных чисел следующие свойства эквивалентны между собой:*

a) существует треугольник со сторонами α, β, γ;

b) наибольшее из этих чисел не больше суммы двух остальных;

c) каждое из этих чисел не больше суммы двух остальных;

d) $|\alpha-\beta|\leqslant\gamma\leqslant\alpha+\beta$.

Доказательство. Мы докажем эти эквивалентности, установив следующую цепочку импликаций:

$$a\Rightarrow b\Rightarrow c\Rightarrow d\Rightarrow a.$$

1. Справедливость импликации $(a\Rightarrow b)$ вытекает из следствия 39.4.

2. $(b\Rightarrow c)$ очевидно, потому что если, например, $\alpha\leqslant\gamma$ и $\beta\leqslant\gamma$, то $\alpha\leqslant\beta+\gamma$ и $\beta\leqslant\gamma+\alpha$.

3. $(c\Rightarrow d)$, поскольку соотношения $\alpha\leqslant\beta+\gamma$ и $\beta\leqslant\alpha+\gamma$ могут быть представлены также в виде $\alpha-\beta\leqslant\gamma$ и $\beta-\alpha\leqslant\gamma$, что влечет $|\alpha-\beta|\leqslant\gamma$; соотношение $\gamma\leqslant\alpha+\beta$ выполняется по предположению.

4. $(d\Rightarrow a)$; это очевидно, если $\alpha=0$ или $\beta=0$; предположим, что $\alpha\neq0$ и $\beta\neq0$. Соотношение $|\alpha-\beta|\leqslant\gamma\leqslant\alpha+\beta$ может быть также представлено в виде

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\leqslant\gamma^2\leqslant\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta,$$

или

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2k\alpha\beta,\text{ где }-1\leqslant k\leqslant1.$$

Допустим на какое-то время, что существует такая пара (A,B) лучей с начальной точкой 0, что $c(A,B)=k$.

Пусть тогда x — точка луча A, для которой $d(0, x) = \alpha$, и y — точка луча B, для которой $d(0, y) = \beta$.

Из соотношения

$$d^2(x, y) = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta c(A, B) = \alpha^2 + \beta^2 - 2k\alpha\beta$$

следует, что стороны треугольника $(0, x, y)$ равны α, β, γ соответственно.

Остается доказать существование такой пары (A, B).

Лемма 39.6. *Для любого числа $k \in [-1, 1]$ найдется пара (A, B) лучей с общим началом* 0, *такая, что $c(A, B) = k$.*

Доказательство. Пусть U, V — две перпендикулярные ориентированные прямые, проходящие через 0, и пусть b — точка с координатами $\left(k, \sqrt{1-k^2}\right)$ в системе осей U, V.

Легко проверить, что искомыми лучами A, B будут соответственно положительный луч оси U и луч $D(0, b)$.

Комментарий. Заметим, что это построение основано на существовании квадратного корня $\sqrt{1-k^2}$. Лемма может на самом деле оказаться неверной в случае плоскости, которая удовлетворяет аксиомам I, II, III, IV, но для которой поле R заменено каким-нибудь его подполем K. Действительно, пусть K — такое подполе поля R, что

$$(x \in K \text{ и } y \in K) \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} \in K\right)$$

и при этом в поле K существует число $a > 0$, для которого

$$\sqrt{a} \notin K.$$

Определим очевидным образом на K^2 структуру плоскости, удовлетворяющую аксиомам I, II, III, IV; однако для этой плоскости предыдущая лемма будет неверна, так как если положить $k=(1-a)/(1+a)$, то число $\sqrt{1-k^2}$ не будет принадлежать K.

Можно показать, что существует много таких полей K.

Именно поэтому необходимо в процессе преподавания точно оговаривать, подобно тому, как это сделано в последнем доказательстве, что требуется существование корня квадратного для всех положительных чисел; благодаря этому нам удается избежать в дальнейшем при изучении пересечения двух окружностей пустых «псевдодоказательств», основанных на неточных понятиях непрерывности.

40. Ортогональная проекция

Предложение 40.1. *Пусть D — некоторая прямая, $a \in \Pi$, и пусть p — ортогональная проекция точки a на D.*

1. *Для всех $x, y \in D$,*

$$(d(p, x)=d(p, y)) \Leftrightarrow (d(a, x)=d(a, y)).$$

2. *Пусть D_1 — один из лучей прямой D с началом в точке p.*

Отображение $x \to d(a, x)$ луча D_1 в R будет строго возрастающим.

Доказательство. Оба утверждения немедленно следуют из соотношения

$$d^2(a, x)=d^2(a, p)+d^2(p, x).$$

Можно также добавить, что поскольку известен факт существования квадратного корня из всех положительных чисел, то функция $x \to d(a, x)$ взаимно однозначно отображает D_1 на $[d(a, p), \infty[$.

Следствие 40.2. *Расстояние $d(a, x)$ достигает минимума в единственной точке $x=p$.*

Следствие 40.3. *Пусть D — некоторая прямая, $a \in D$ и $b \notin D$. Тогда*

$$(D \perp \Delta(a, b)) \Leftrightarrow (d(a, b) \leqslant d(a, x) \text{ для всех } x \in D).$$

Следствие 40.4. *Для всех $a, b, c \in \Pi$ и всех $x \in [b, c]$*

$$d(a, x) \leqslant \sup(d(a, b),\ d(a, c)).$$

Предложение 40.5. *Ортогональная проекция на произвольную прямую уменьшает расстояния.*

Доказательство. Пусть D — некоторая прямая, и пусть $x, y \in \Pi$. Обозначим через D' прямую, параллельную D и содержащую x, через x', y' — проекции

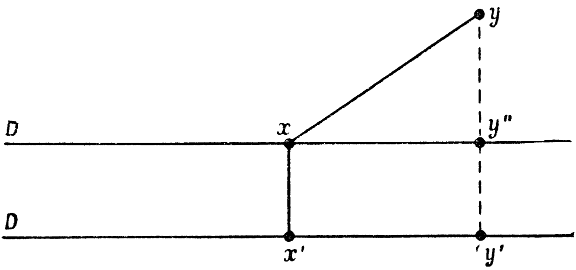

Рис. 9.

точек x, y на прямую D и через y'' проекцию точки y на D' (рис. 9). Тогда в прямоугольнике (x, y'', y', x')

$$d(x', y') = d(x, y'').$$

В прямоугольном треугольнике (x, y, y'')

$$d(x, y'') \leqslant d(x, y).$$

Следовательно, $d(x', y') \leqslant d(x, y)$; равенство имеет место только в том случае, когда x, y принадлежат прямой, параллельной D.

41. Медиатриса

Определение 41.1. Для любых $a, b \in \Pi$, таких, что $a \neq b$, *медиатрисой* пары (a, b) называется прямая, проходящая через середину пары (a, b) и перпендикулярная прямой $\Delta(a, b)$.

Предложение 41.2. *Пусть* $a, b \in \Pi$, $a \neq b$, 0 — *середина пары* (a, b), *и пусть* D — *медиатриса пары* (a, b).

Тогда для всех $x \in \Pi$

$$d^2(x, b) - d^2(x, a) = 4l\xi,$$

где $l = d(0, a)$ *и* ξ — *абсцисса точки* x *в системе осей*

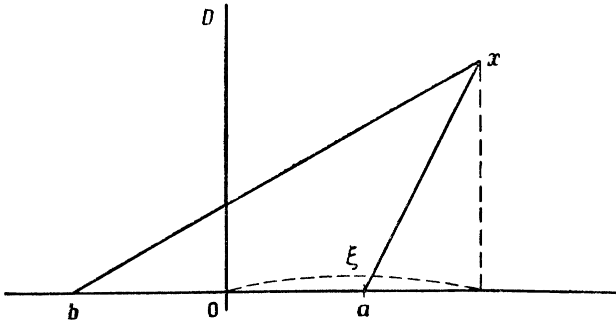

Рис. 10.

$(\Delta(a, b), D)$ (рис. 10; прямая $\Delta(a, b)$ ориентирована так, что $0 < a$).

Доказательство. Действительно, на плоскости $(\Pi, 0)$

$$d^2(x, b) - d^2(x, a) = (x - b)^2 - (x - a)^2 = \\ = (x + a)^2 - (x - a)^2 = 4a \cdot x = 4l\xi.$$

Следствие 41.3. *Пусть* D — *медиатриса пары* (a, b), *и пусть* Π_a, Π_b — *открытые полуплоскости, определяемые* D *и содержащие соответственно точки* a *и* b.

В зависимости от того, принадлежит x *полуплоскости* Π_b, *прямой* D *или полуплоскости* Π_a

$$d(x, b) < d(x, a); \; d(x, a) = d(x, b) \text{ или } d(x, b) > d(x, a).$$

Действительно, в соответствии с тем, принадлежит x полуплоскости Π_b, прямой D или полуплоскости Π_a, имеем $\xi < 0$, $\xi = 0$ или $\xi > 0$; остается применить предложение 41.2.

Следствие 41.4. *Для любого $h \in R$ множество точек x плоскости Π, для которых*

$$d^2(x, b) - d^2(x, a) = h,$$

есть прямая, перпендикулярная прямой $\Delta(a, b)$ и пересекающая эту прямую в точке с абсциссой $\xi = h/4l$.

42. Моменты инерции

Определение 42.1. Назовем *системой точечных масс* плоскости Π всякое конечное семейство пар (a_i, α_i), где $a_i \in \Pi$ и $\alpha_i \in R$.

Для любого $x \in \Pi$ *моментом инерции* такой системы относительно точки x называется число *)

$$f(x) = \sum_i \alpha_i d^2(x, a_i).$$

Предложение 42.2. *Пусть $(a_i, \alpha_i)_{i \in I}$ — система точечных масс плоскости Π.*

1. *В случае $\sum \alpha_i = 0$ момент инерции f этой системы есть аффинная функция точки x; более точно: на центрированной плоскости* $(\Pi, 0)$

$$f(x) = \sum \alpha_i a_i^2 - 2\left(\sum \alpha_i a_i\right) \cdot x.$$

Следовательно, если, кроме того, $\sum \alpha_i a_i = 0$, то $f(x)$ не зависит от x.

2. *Пусть $\sum \alpha_i \neq 0$, и пусть a — центр тяжести рассматриваемой системы; тогда*

$$f(x) = \left(\sum \alpha_i\right) d^2(a, x) + \sum \alpha_i d^2(a, a_i).$$

Доказательство. 1. Действительно,

$$f(x) = \sum \alpha_i (x - a_i)^2 = \left(\sum \alpha_i\right) x^2 - 2\left(\sum \alpha_i a_i\right) \cdot x + \sum \alpha_i a_i^2,$$

*) Ясно, что если все $\alpha_i > 0$, то момент инерции относительно точки x системы материальных точек, расположенных в пунктах a_i плоскости Π и обладающих массами α_i, понимаемый в том смысле, в каком употребляется этот термин в механике, равен $f(x)$; обобщение здесь состоит в отказе от требования $\alpha_i > 0$.

откуда получаем первое соотношение, поскольку $\sum \alpha_i = 0$.

2. Если $\sum \alpha_i \neq 0$, то, как известно, $\sum \alpha_i a_i = 0$ в том случае, когда точка a принята за начало, откуда и следует искомое соотношение.

Следствие 42.3. 1. *Если* $\sum \alpha_i = 0$ *и* $\sum \alpha_i a_i \neq 0$, *то множество таких* x, *для которых* $f(x) = h$, *есть прямая, перпендикулярная* $\sum \alpha_i a_i$.

2. *Если* $\sum \alpha_i \neq 0$, *то момент инерции* $f(x)$ *достигает в центре тяжести* a *строгого минимума или строгого максимума в зависимости от того, положительна или отрицательна величина* $\sum \alpha_i$.

3. *Множество таких* x, *для которых* $f(x) = h$, *есть либо окружность с центром* a, *либо множество* $\{a\}$, *либо пустое множество* $\emptyset$.

Частные случаи. Рассматривая систему, образованную точками a, b с массами 1, 1 или 1, —1, мы получим ранее доказанные результаты (см. предложения 39.1 и 41.2).

43. Скалярное произведение и расстояние в произвольном базисе

Пусть (a_1, a_2) — базис центрированной плоскости $(\Pi, 0)$, и пусть (ξ_1, ξ_2), (ξ_1', ξ_2') — координаты векторов x, x' относительно этого базиса. Из соотношений

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2; \quad x' = \xi_1' a_1 + \xi_2' a_2$$

следует, что

$$x \cdot y = \xi_1 \xi_1' a_1^2 + \xi_2 \xi_2' a_2^2 + (\xi_1 \xi_2' + \xi_2 \xi_1') a_1 \cdot a_2.$$

При $x = y$ получаем квадратичную форму, выражающую $\|x\|^2$ как функцию координат ξ_1, ξ_2.

Эти формулы существенно упрощаются, если (a_1, a_2) — ортонормированный базис, т. е. если

$$\| a_1 \| = \| a_2 \| = 1 \quad \text{и} \quad a_1 \perp a_2.$$

Тогда

$$x \cdot y = \xi_1 \xi_1' + \xi_2 \xi_2' \quad \text{и} \quad \| x \|^2 = x \cdot x = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

ГЛАВА IV

ДВИЖЕНИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ. СИММЕТРИЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 1. ДВИЖЕНИЯ

В метрической геометрии плоскости наиболее важными преобразованиями являются те, которые сохраняют как аффинную, так и метрическую структуру плоскости.

Среди них осевые симметрии занимают привилегированное положение; можно даже — это будет показано в приложении 1 — построить аксиоматику плоскости, основанную на осевых симметриях*). Действительно, с одной стороны, они порождают группу движений, а с другой стороны, являются схематизацией очень простых конкретных операций, как, например складывание листа бумаги, вращение плоской пластины вокруг отрезка прямой, отражение в зеркале.

44. Осевые симметрии и центральные симметрии

В гл. II мы определили косую симметрию с осью D параллельно некоторому направлению δ; здесь мы хотим заняться изучением того частного случая, когда δ перпендикулярно D. Сейчас мы заново дадим определение такой симметрии, пользуясь понятием медиатрисы.

Определение 44.1. Для всякой прямой D плоскости Π будем называть *симметрией относительно* D (или *симметрией с осью* D) отображение f плоскости Π в себя, определяемое следующим образом:

Если $x \in D$, то $f(x) = x$;

*) Ср. также Дельсер [34] (и Бахман [20]).

Если $x \notin D$, то $f(x)$ есть определяемая единственным образом точка, такая, что D есть медиатриса пары $(x, f(x))$.

Иногда бывает удобно обозначать симметрию относительно D через (D).

Как и в случае косой симметрии, мы опять замечаем, что f^2 есть тождественное преобразование и, следовательно, f — инволютивное преобразование плоскости Π.

Предложение 44.2. *Всякая осевая симметрия есть аффинное преобразование плоскости* Π, *и более того, движение.*

Доказательство. Первое свойство есть частный случай предложения 29.2. Пусть теперь A — ось симметрии f, и B — перпендикуляр к A; в системе осей (A, B) обозначим через (x_1, x_2) составляющие точки x; тогда точка $f(x)$ будет иметь составляющие $(x_1, -x_2)$; следовательно, для всех $x, y \in \Pi$

$$(f(x) - f(y))^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (x - y)^2.$$

Из этого равенства следует, что f — движение.

Следствие 44.3. *Всякая осевая симметрия преобразует любой луч в луч, любой отрезок в отрезок* (*и, следовательно, также любое выпуклое множество в выпуклое множество*).

Это следует из аффинного характера симметрии, либо из инвариантности расстояний; можно также доказать это более элементарным способом, исходя из координатной записи (осевой) симметрии

$$(x_1, x_2) \to (x_1, -x_2).$$

Следствие 44.4. *Всякая осевая симметрия преобразует любую пару перпендикулярных прямых в пару перпендикулярных прямых.*

Действительно, симметрия сохраняет расстояние; однако перпендикулярность прямых может быть выражена в терминах расстояний (теорема Пифагора или минимум расстояния; см. следствие 40.3).

Предложение 44.5. *Пусть A, B — две перпендикулярные прямые, проходящие через 0. Произведение осевых симметрий (A), (B) есть центральная симметрия с центром в точке 0. Произведение осевой симметрии (A) и центральной симметрии с центром в точке 0 есть осевая симметрия с осью B.*

См. предложение 32.1.

Следствие. *Всякая центральная симметрия есть движение.*

Предложение 44.6. *Произведение двух осевых симметрий с параллельными осями есть перенос, направление которого перпендикулярно этим осям.*

Произведение осевой симметрии с осью D и переноса, направление которого перпендикулярно D, есть осевая симметрия с осью, параллельной прямой D.

Доказательство. Пусть A, B — две параллельные прямые, и пусть (D_1, D_2) — система перпендикулярных осей, таких, что $D_1 \| A$.

Осевая симметрия с осью A записывается как $(x_1, x_2) \to (x_1, 2a_2 - x_2)$; аналогично для оси B.

Произведение $(B) \circ (A)$ этих симметрий есть, следовательно, перенос

$$(x_1,\ x_2) \to (x_1,\ x_2 + 2(b_2 - a_2)) = (x_1,\ x_2) + (0,\ 2(b_2 - a_2)).$$

Вторая часть утверждения доказывается аналогично.

Следствие. *Всякий перенос есть произведение двух осевых симметрий с осями, перпендикулярными направлению этого переноса; первой (или второй) из этих осей может служить* л ю б а я *прямая, перпендикулярная направлению переноса.*

Действительно, равенство $t \circ \delta_1 = \delta_2$ эквивалентно равенству $t = \delta_2 \circ \delta_1$; аналогично, $\delta_1 \circ t = \delta_2$ эквивалентно $t = \delta_1 \circ \delta_2$.

Произведения осевых симметрий дадут нам возможность заняться теперь изучением произвольных движений плоскости П.

45. Движения

Мы уже исследовали ранее некоторые движения плоскости; сейчас мы переходим к систематическому изучению этого понятия.

Определение 45.1. Пусть $X \subset \Pi$, и пусть f — отображение множества X в Π; говорят, что f есть *движение* множества X, если для любых $x, y \in X$ выполняется условие

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Ясно, что всякое движение есть взаимно однозначное отображение, что ограничение движения множества X на некоторое его подмножество Y есть движение множества Y, и что композиция двух движений есть движение.

Например, перенос, осевая симметрия и центральная симметрия — движения множества Π.

Теперь мы переходим к доказательству одного за другим четырех предложений, которые приведут нас к важной теореме.

Предложение 45.2. *Для всякого $X \subset \Pi$ любое движение f, переводящее X в подмножество Π и имеющее по крайней мере три неподвижные точки, не принадлежащие одной прямой, есть тождественное преобразование.*

Доказательство. Пусть a_1, a_2, a_3 — неподвижные точки; тогда для всех $x \in X$

$$d(x, a_i) = d(f(x), f(a_i)) = d(f(x), a_i) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Таким образом, случай $x \neq f(x)$ возможен только тогда, когда все точки a_i принадлежат медиатрисе пары $(x, f(x))$, что исключается условием.

Предложение 45.3. *Для любого $X \subset \Pi$ всякое движение f, переводящее X в подмножество Π и имеющее по крайней мере две различные неподвижные точки a_1, a_2, есть либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия с осью $\Delta(a_1, a_2)$.*

Действительно, если f не есть тождественное преобразование, то найдется такая точка $a_3 \in X$, что $a_3 \neq f(a_3)$; медиатриса пары $(a_3, f(a_3))$ содержит a_1 и a_2 (рассуждение строится так же, как в доказательстве предложения 45.2); следовательно, это есть прямая $\Delta(a_1, a_2)$; поэтому, с одной стороны, a_1, a_2, a_3 не принадлежат одной прямой, а с другой стороны, если обозначить через s_3 осевую симметрию с осью $\Delta(a_1, a_2)$, то a_1, a_2, a_3 — неподвижные точки движения $s_3 \circ f$.

По предложению 45.2 получаем, следовательно: $s_3 \circ f$ — тождественное преобразование, откуда $f = s_3$.

Следствие. *Пусть A — открытый или замкнутый луч. Всякое движение f плоскости Π, переводящее ее в себя, для которого $f(A) = A$, есть либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия, ось которой содержит A.*

Предложение 45.4. *Для любого $X \subset \Pi$ всякое движение f, переводящее X в подмножество Π и имеющее по крайней мере одну неподвижную точку a_1, есть либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия, ось которой содержит точку a_1, либо произведение двух таких симметрий.*

Доказательство. Действительно, если f не есть тождественное преобразование, то найдется такая точка $a_2 \in X$, что $a_2 \neq f(a_2)$; медиатриса D_2 пары $(a_2, f(a_2))$ проходит, следовательно, через точку a_1; обозначив через s_2 осевую симметрию с осью D_2, получим, что a_1 и a_2 — различные неподвижные точки отображения $s_2 \circ f$. Из предложения 45.3 следует, таким образом (обозначения сохраняются), что либо $s_2 \circ f$ — тождественное преобразование, либо $s_2 \circ f = s_3$, откуда либо $f = s_2$, либо $f = s_2 \circ s_3$.

Предложение 45.5. *Для любого $X \subset \Pi$ всякое движение f, переводящее X в подмножество Π, есть произведение не более чем трех* (т. е. 0, 1, 2 или 3) *осевых симметрий.*

Доказательство. Действительно, если f не есть тождественное преобразование, то найдется такая точка $a_1 \in X$, что $a_1 \neq f(a_1)$; обозначив через s_1 осевую симметрию относительно медиатрисы D_1 пары $(a_1, f(a_1))$, заключаем, что a_1 есть неподвижная точка преобразования $s_1 \circ f$.

По предложению 45.4 получаем, следовательно (используя те же обозначения что и выше):

либо $s_1 \circ f$ — тождественное преобразование, либо $s_1 \circ f = s_2$, либо $s_1 \circ f = s_2 \circ s_3$, откуда либо $f = s_1$, либо $f = s_1 \circ s_2$, либо $f = s_1 \circ s_2 \circ s_3$.

Теорема 45.6. 1. *Всякое движение плоскости* П, *переводящее ее в себя, есть либо тождественное преобразование, либо преобразование, имеющее один из следующих трех видов*: s_1, $s_1 \circ s_2$, $s_1 \circ s_2 \circ s_3$, *где* s_i — *осевые симметрии.*

Движение есть аффинное преобразование плоскости; оно сохраняет перпендикулярность прямых.

2. *Пусть* $X \subset$ П; *тогда, если* X *не принадлежит одной прямой, то всякое движение* f, *переводящее* X *в подмножество* П, *единственным образом может быть продолжено до движения* g *плоскости* П, *переводящего ее в себя; если же* X *принадлежит некоторой прямой и содержит не менее двух точек, то это движение может быть продолжено до движения всей плоскости двумя способами.*

Доказательство. Первая часть вытекает из предложения 45.5 и из того факта, что всякая осевая симметрия есть аффинное преобразование плоскости П, сохраняющее перпендикулярность. Во второй части теоремы существование преобразования g есть следствие предложения 45.5. С другой стороны, пусть g, g' — два продолжения движения f; тогда $g^{-1} \circ g'$ тождественно на X; следовательно, если X не принадлежит одной прямой, то $g^{-1} \circ g'$ тождественно всюду на П, а если X принадлежит одной прямой и содержит по крайней мере две точки, то $g^{-1} \circ g'$ есть либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия, причем в этом случае либо $g' = g$, либо $g' = g \circ \sigma$, где σ — осевая симметрия, ось которой содержит X.

46. Группа движений с неподвижной точкой

Сейчас мы займемся изучением множества $\mathscr{I}_0$ движений плоскости П, оставляющих неподвижной некоторую точку 0 этой плоскости; это важно потому, что, с одной стороны, понятие вращения очень существенно, а с другой стороны, нам это понадобится при определении углов. При изучении множества $\mathscr{I}_0$ основным орудием опять-таки будут служить осевые симметрии.

Очевидно, что $\mathscr{I}_0$ есть группа преобразований плоскости П. Через $\mathscr{S}_0$ обозначается часть группы $\mathscr{I}_0$, образованная осевыми симметриями, оси которых содержат 0; а через $\mathscr{R}_0$ — часть группы $\mathscr{I}_0$, образованная вращениями вокруг точки 0, т. е. элементами группы $\mathscr{I}_0$, имеющими вид $s_1 \circ s_2$, где s_1 и $s_2 \in \mathscr{S}_0$ (другими словами[1]), $\mathscr{R}_0 = \mathscr{S}_0 \circ \mathscr{S}_0$). Для изучения $\mathscr{I}_0$, $\mathscr{S}_0$, $\mathscr{R}_0$ нам понадобится некоторое вспомогательное множество; это может быть либо множество лучей с началом в точке 0, либо образ этого множества при взаимно однозначном отображении его на окружность с центром в точке 0.

Итак, пусть C_0 — множество таких точек x плоскости П, для которых $d(0, x) = 1$ (впрочем, радиус окружности несуществен).

Составим теперь список свойств, которые мы уже знаем и которыми (и только ими!) мы будем пользоваться в предстоящем исследовании:

П — некоторое множество, C_0 — его подмножество; $\mathscr{I}_0$ — группа преобразований множества П, $\mathscr{S}_0$ — часть этой группы; положим $\mathscr{R}_0 = \mathscr{S}_0 \circ \mathscr{S}_0$. Элементы множества $\mathscr{S}_0$ называются (*осевыми*) симметриями,

[1]) Напомним, что в более общем случае, если A, B — два подмножества некоторого множества E, снабженного бинарной операцией, обозначаемой через $\top$, то через $A \top B$ обозначается совокупность элементов множества E, имеющих вид $x \top y$, где $x \in A$ и $y \in B$.

элементы множества $\mathscr{R}_0$ — **вращениями**. Кроме того:

1°. Для всякой осевой симметрии σ преобразование σ^2 есть тождественное преобразование.

2°. Тождественное преобразование не есть осевая симметрия.

3°. Для всех $x, y \in C_0$ существует, и притом единственная, осевая симметрия σ, такая, что $\sigma(x) = y$; она будет обозначаться через σ_{yx}.

4°. Для каждой осевой симметрии σ существует хотя бы одна точка $x \in C_0$, такая, что $\sigma(x) = x$.

5°. Для любого $f \in \mathscr{I}_0$ и всех $x \in C_0$

$$(f(x) = x) \Leftrightarrow (\text{либо } f \text{ есть тождественное преобразование, либо } f = \sigma_{xx}).$$

Все эти утверждения описывают уже известные нам свойства:

В п. 3°, если $y = x$, то σ_{xx} есть осевая симметрия с осью $\Delta(0, x)$; если же $y \neq z$, то σ_{yx} есть осевая симметрия, осью которой является медиатриса пары (x, y);

Упоминаемая в п. 4° точка x множества C_0 есть одна из двух точек оси симметрии σ, для которых $d(0, x) = 1$; пункт 5° есть не что иное как иначе сформулированное предложение 45.3.

Предложение 46.1. *Никакое вращение не может быть осевой симметрией (иначе говоря, $\mathscr{R}_0 \cap \mathscr{S}_0 = \varnothing$).*

Доказательство. Действительно, пусть $\rho, \sigma, \tau \in \mathscr{S}_0$; по свойству 3° найдется такое $a \in C_0$, для которого $\tau(a) = a$. Покажем, что равенство $\rho = \sigma \circ \tau$ невозможно:

$$(\rho = \sigma \circ \tau) \Rightarrow (\rho(a) = \sigma(\tau(a)) = \sigma(a)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\rho = \sigma) \Rightarrow (\tau - \text{тождественное преобразование}),$$

что невозможно в соответствии с п. 2°.

Вторая из этих импликаций следует из свойства 3°; третья следует из сопоставления равенств $\rho = \sigma$ и $\rho = \sigma \circ \tau$.

Предложение 46.2. *Для любых $x, y \in C_0$ найдутся только два элемента $f \in \mathscr{I}_0$, для которых $y = f(x)$: осевая симметрия σ_{yx} и вращение $\sigma_{yx} \circ \sigma_{xx}$.*

Доказательство. Действительно,

$$(f(x)=y \text{ и } \sigma_{xy}(y)=x) \Rightarrow (\sigma_{xy}\circ f(x)=x).$$

В соответствии с п. 5° получаем, следовательно: либо $\sigma_{xy}\circ f$ — тождественное преобразование, либо $\sigma_{xy}\circ f=\sigma_{xx}$.

Отсюда либо $f=\sigma_{yx}$, либо $f=\sigma_{yx}\circ\sigma_{xx}$.

Следствие 46.3. *Для любых x, $y\in C_0$ существует единственное вращение, переводящее x в y.*

Следствие 46.4. *$\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{S}_0$ образуют разбиение множества $\mathcal{I}_0$.*

Действительно, для любого $f\in\mathcal{I}_0$ и всех $a\in C_0$ из предложения 46.2 следует, что f есть либо осевая симметрия, либо вращение, переводящее a в $f(a)$.

Предложение 46.5. *Для всякого вращения $f\in\mathcal{R}_0$ и любого $\sigma\in\mathcal{S}_0$ найдется такое $\tau\in\mathcal{S}_0$, что $f=\tau\circ\sigma$ (и такое τ', что $f=\sigma\circ\tau'$).*

Доказательство. Действительно, в соответствии с п. 3° существует такое $a\in C_0$, что $\sigma(a)=a$; положим $f(a)=b$.

Имеет место равенство: $\sigma_{ba}\circ\sigma(a)=b$; поэтому вращения f и $\sigma_{ba}\circ\sigma$ совпадают по следствию 46.3.

Отсюда вытекает, что σ_{ba} — искомая осевая симметрия τ.

Наконец, обратным к любому вращению будет также вращение, и следовательно, существует такое $\tau'\in\mathcal{S}_0$, что $f^{-1}=\tau'\circ\sigma$, т. е. $f=\sigma\circ\tau'$.

Предложение 46.6. *Произведение четного (соответственно нечетного) числа осевых симметрий есть вращение (соответственно осевая симметрия).*

Доказательство. Достаточно показать, что произведение трех осевых симметрий есть осевая симметрия; справедливость утверждения будет получаться отсюда индукцией по числу сомножителей. Но в соответствии с предложением 46.5 для всех

$\pi, \rho, \sigma \in \mathcal{S}_0$ найдется такое $\tau \in \mathcal{S}$, что $\pi \circ \rho = \tau \circ \sigma$, откуда $\pi \circ \rho \circ \sigma = \tau$.

Теорема 46.7. 1. *Множество $\mathcal{R}_0$ вращений с центром в точке 0 есть коммутативная подгруппа группы $\mathcal{I}_0$.*

2. *Для всех $\sigma \in \mathcal{S}_0$ имеют место равенства $\sigma \circ \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0 \circ \sigma = \mathcal{S}_0$.*

3. *Группа $\mathcal{R}_0$ однотранзитивна*[1]) *на множестве C_0.*

Доказательство. 1. Из предложения 46.6 следует, что произведение двух вращений есть также вращение; преобразование, обратное к вращению $\rho \circ \sigma$, есть вращение $\sigma \circ \rho$. Следовательно, $\mathcal{R}_0$ есть группа; покажем, что эта группа коммутативна.

Для любых $f, g \in \mathcal{R}_0$ и любых $\sigma \in \mathcal{S}_0$ найдутся такие $\pi, \rho \in \mathcal{S}_0$, что $f = \pi \circ \sigma$ и $g = \sigma \circ \rho$; отсюда получаем эквивалентности

$$(f \circ g = g \circ f) \Leftrightarrow (\pi \circ \sigma \circ \sigma \circ \rho = \sigma \circ \rho \circ \pi \circ \sigma) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\pi \circ \rho \circ \sigma)^2 - \text{тождественное преобразование}).$$

Последнее утверждение выполняется вследствие того, что $\pi \circ \rho \circ \sigma$ есть осевая симметрия (предложение 46.6); следовательно,

$$f \circ g = g \circ f.$$

2. Как видно из предложения 46.6, имеют место соотношения: $\sigma \circ \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{S}_0$ и $\sigma \circ \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{R}_0$; последнее включение может быть представлено также в виде $\mathcal{S}_0 \subset \sigma \circ \mathcal{R}_0$, так что имеет место равенство $\sigma \circ \mathcal{R}_0 = \mathcal{S}_0$. Аналогично получаем $\mathcal{R}_0 \circ \sigma = \mathcal{S}_0$.

Этот результат эквивалентен утверждению, что $\mathcal{R}_0$ есть *нормальный делитель* группы $\mathcal{I}_0$ и что композиции всех элементов группы $\mathcal{R}_0$ и некоторого преобразования $f \in \mathcal{I}_0$ образуют $\mathcal{R}_0$ или $\mathcal{S}_0$ в зависимости от того, $f \in \mathcal{R}_0$ или $f \in \mathcal{S}_0$. Другими словами, *фактор-группа $\mathcal{I}_0/\mathcal{R}_0$ есть группа второго порядка.*

---

[1]) То есть для любых $x, y \in C_0$ существует *единственное* преобразование $f \in \mathcal{R}_0$, такое, что $y = f(x)$.

3. Справедливость третьего свойства устанавливается в следствии 46.3.

Мы вернемся к изучению вращений после того, как дадим определение угла. Теперь мы собираемся использовать полученные результаты для того, чтобы провести краткое исследование произвольных движений плоскости П.

47. Собственные и зеркальные движения

Определение 47.1. Говорят, что движение плоскости П есть *собственное движение* (соответственно *зеркальное движение*), если оно есть произведение четного (соответственно нечетного) числа осевых симметрий [1]).

Множество движений плоскости П (собственных движений, зеркальных движений) будет обозначаться через $\mathcal{J}$ (соответственно $\mathcal{J}^+$, $\mathcal{J}^-$).

Как видно из теоремы 45.6, справедливо равенство $\mathcal{J} = \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$; мы скоро увидим, что $\mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^- = \emptyset$. Непосредственно из определения следует, что $\mathcal{J}^+$ есть подгруппа группы $\mathcal{J}$, и даже более того, — нормальный делитель.

Мы сведем изучение произвольных движений к изучению движений, оставляющих на месте некоторую точку 0; предлагаемый ниже метод очевидным

[1]) В этом пункте терминология является весьма разнообразной и нечеткой. Мы отказались от терминов «прямое» и «обратное» движение, так как могло бы возникнуть смешение понятий «обратное движение» и «движение, обратное к данному»; мы также отказались от «положительного» и «отрицательного» движения, так как центральная симметрия тогда окажется одновременно «положительным движением» и гомотетией с отрицательным коэффициентом; наконец, мы отказались от «прямого» и «непрямого» движения, поскольку интуитивный смысл этих терминов может стать понятен только после усвоения понятия движения плоскости как целого. [Автор использует здесь термины «четное» и «нечетное» движение, неупотребительные в русской литературе; из двух бытующих у нас выражений «движения 1-го рода», «движения 2-го рода» (см., например, Перепелкин [43]) и «собственные движения», «зеркальные движения» (Яглом [33]) второй вариант кажется нам более выразительным. — *Прим. ред.*]

образом можно приспособить для изучения преобразований пространства; равным образом легко получить его аналитическое описание.

Мы будем обозначать через $\mathcal{T}$ группу переносов плоскости Π; множества $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{R}_0$ — те же, что и в п. 46.

Лемма 47.2. 1. *Любое преобразование $f \in \mathcal{I}$ может быть представлено единственным образом в виде $f = t \circ \bar{f}$, где $t \in \mathcal{T}$ и $\bar{f} \in \mathcal{I}_0$* (преобразование $\bar{f}$ называется приведенной формой преобразования f на плоскости $(\Pi, 0)$).

2. *Если f — некоторая осевая симметрия с осью D, то ее приведенной формой будет осевая симметрия с осью D', параллельной прямой D и проходящей через точку* 0.

Доказательство. 1. Требуется представить f в виде $x \to a + \bar{f}(x)$ (в системе $(\Pi, 0)$).

Единственность. Если f есть преобразование такого вида, то очевидно, что $a = f(0)$ и $\bar{f}(x) = f(x) - f(0)$.

Существование. Пусть $\bar{f}$ — отображение $x \to f(x) - f(0)$; это движение, при котором точка 0 остается неподвижной; следовательно, $\bar{f} \in \mathcal{I}_0$.

Так как $f(x) = f(0) + \bar{f}(x)$, то мы получили, таким образом, искомую каноническую форму.

2. Пусть g — осевая симметрия с осью D'; по предложению 44.6 преобразование $f \circ g$ есть перенос t, откуда получаем, что $f = t \circ g$; следовательно, $g = \bar{f}$.

Предложение 47.3. 1. *Отображение $f \to \bar{f}$ группы $\mathcal{I}$ в $\mathcal{I}_0$ есть представление группы $\mathcal{I}$ в группе $\mathcal{I}_0$.*

2. *Образами подмножеств $\mathcal{I}^+$ и $\mathcal{I}^-$ при этом представлении будут соответственно $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{S}_0$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим преобразования $f, g \in \mathcal{I}$ и $\bar{f}$, $\bar{g}$ — приведенные формы этих преобразований.

Так как $\bar{f}$ и $\bar{g}$ линейны, то из соотношений

$$f(x) = f(0) + \bar{f}(x); \quad g(y) = g(0) + \bar{g}(y)$$

следует, что

$$g(f(x)) = g(0) + \bar{g}(f(0)) + \bar{g}(\bar{f}(x)) = g(f(0)) + \bar{g}(\bar{f}(x)),$$

откуда получаем:

$$(\overline{g \circ f}) = \bar{g} \circ \bar{f}.$$

2. Мы знаем (лемма 47.2), что для всякой осевой симметрии f ее приведенная форма $\bar{f}$ есть также осевая симметрия; только что было показано, что приведенная форма произведения n осевых симметрий есть произведение n элементов множества $\mathscr{S}_0$, что доказывает вторую часть предложения.

Следствие 47.4. *Множества $\mathscr{I}^+$ и $\mathscr{I}^-$ образуют разбиение множества $\mathscr{I}$; для любого $\sigma \in \mathscr{I}^-$ справедливо равенство*

$$\sigma\mathscr{I}^+ = \mathscr{I}^+\sigma = \mathscr{I}^-.$$

Следствие 47.5. *Для любой пары A_1, A_2 замкнутых лучей плоскости* П *существует, и притом только одно, собственное движение плоскости* П, *переводящее A_1 в A_2; аналогичное утверждение справедливо для зеркальных движений.*

Это следствие вытекает из теоремы 45.6 и следствия 47.4.

Об одной подгруппе группы $\mathscr{I}^+$

Группа, образованная центральными симметриями и переносами плоскости П, есть подгруппа группы $\mathscr{I}^+$; действительно, каждое из этих преобразований есть произведение двух осевых симметрий.

48. Структура движений

Пусть $t \circ \bar{f}$ — каноническая форма некоторого движения f на центрированной плоскости (П, 0).

1. Если $\bar{f}$ — вращение, то представим t в виде $\rho \circ \sigma$, где ρ и σ — осевые симметрии и ось симметрии σ содержит 0; как известно, $\bar{f}$ можно представить в виде $\bar{f} = \sigma \circ \tau$, где τ — еще одна осевая симметрия.

Таким образом,

$$f = t \circ \bar{f} = \rho \circ \sigma \circ \sigma \circ \tau = \rho \circ \tau;$$

следовательно, f — либо перенос, либо вращение (в зависимости от того, параллельны оси симметрий ρ и τ или пересекаются).

2. Если $\bar{f}$ — осевая симметрия, выберем систему перпендикулярных осей так, чтобы первая ось совпадала с осью этой симметрии. В этой системе осей отображение f имеет вид

$$(x_1, x_2) \to (x_1 + a_1, -x_2 + a_2);$$

или иначе, после соответствующего переноса первой оси,

$$(x_1, x_2) \to (x_1 + a_1, -x_2).$$

В случае $a_1 = 0$ преобразование f есть осевая симметрия; в противном случае, хотя существует некоторая прямая D, которая при этом преобразовании переходит сама в себя, f не есть осевая симметрия с осью D.

В качестве резюме сформулируем следующее

Предложение 48.1. 1. *Всякое собственное движение является произведением двух осевых симметрий, поэтому оно есть либо перенос, либо вращение.*

2. *Всякое зеркальное движение есть произведение некоторой осевой симметрии и переноса, направление которого параллельно оси этой симметрии* *).

Отсюда ясен характер неподвижных точек всякого движения.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

49. Характеристические свойства

Определение 49.1. Пусть $X \subset \Pi$ и k — некоторое положительное число; рассмотрим отображение f множества X в множество Π. Говорят, что f есть *пре-*

---

*) Произведение симметрии с осью D и переноса в направлении $\delta \ni D$ называется скользящей симметрией с осью D.

образование подобия с коэффициентом подобия k, если для любых $x, y \in X$ имеет место равенство

$$d(f(x),\ f(y)) = kd(x,\ y).$$

Преобразование подобия с коэффициентом 1 есть не что иное как движение.

Лемма 49.2. *Всякое растяжение плоскости* Π *с коэффициентом* h *есть преобразование подобия с коэффициентом подобия* $|h|$.

Действительно, такое растяжение в центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ может быть представлено в виде

$$x \to hx + a,$$

откуда

$$d(f(x), f(y)) = \| f(x) - f(y) \| = |h| \cdot \| x - y \| = |h| d(x, y).$$

Предложение 49.3. *Для любого* $X \subset \Pi$ *всякое преобразование подобия* f, *переводящее* X *в подмножество* Π, *с коэффициентом* k *может быть продолжено до преобразования подобия множества* Π, *переводящего* Π *в себя и имеющего тот же коэффициент подобия* k, *причем это продолжение единственно, если* X *не принадлежит одной прямой, и может быть определено двумя способами, если* X *принадлежит некоторой прямой и содержит не менее двух точек.*

Доказательство. Действительно, пусть φ — некоторая гомотетия плоскости Π с коэффициентом k; преобразование $\varphi^{-1} \circ f$ есть движение множества X, и следовательно, может быть продолжено до движения ψ плоскости Π, переводящего ее в себя, либо единственным образом, либо двумя способами в зависимости от ранее указанных условий (теорема 45.6); искомым продолжением будет преобразование подобия $\varphi \circ \psi$.

Принимая во внимание это предложение, мы можем ограничиться изучением преобразований подобия, переводящих плоскость Π в себя.

Теорема 49.4. *Всякое преобразование подобия с коэффициентом подобия k, переводящее плоскость Π в себя, есть произведение некоторой гомотетии с тем же коэффициентом и движения.*

Это аффинное преобразование плоскости Π, сохраняющее перпендикулярность.

Преобразования подобия плоскости Π образуют группу S и отображение

$$f \to (\text{коэффициент подобия } k(f))$$

есть представление этой группы S в мультипликативной группе $\overset{*}{R}_{+}$.

Все эти свойства доказываются элементарно в том порядке, в котором они сформулированы. Приведем еще обратное утверждение к одному из них.

Предложение 49.5. *Всякое аффинное преобразование плоскости Π, сохраняющее перпендикулярность, есть преобразование подобия.*

Доказательство. Пусть f — заданное преобразование, и пусть A_1, A_2 — два перпендикулярных луча с общим началом в точке 0; тогда $f(A_1)$ и $f(A_2)$ будут перпендикулярными лучами с началом в точке $f(0)$; следовательно, существует движение g, переводящее A_1, A_2 в $f(A_1)$, $f(A_2)$.

В таком случае $g^{-1} \circ f$ есть линейное преобразование системы $(\Pi, 0)$, сохраняющее перпендикулярность и оставляющее неподвижными лучи A_1, A_2.

Пусть (a_1, a_2) — базис плоскости $(\Pi, 0)$, определяемый условиями

$$\| a_i \| = 1 \quad \text{и} \quad a_i \in A_i \qquad (i = 1,\ 2).$$

В этом базисе преобразование $g^{-1} \circ f$ имеет вид

$$(\xi_1,\ \xi_2) \to (\alpha_1 \xi_1,\ \alpha_2 \xi_2), \quad \text{где} \quad \alpha_1,\ \alpha_2 > 0.$$

Но векторы $(1, 1)$ $(1, -1)$ перпендикулярны; написав условие перпендикулярности их образов (α_1, α_2) и $(\alpha_1, -\alpha_2)$, получим

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 0, \quad \text{откуда} \quad \alpha_1 = \alpha_2.$$

Следовательно, $g^{-1} \circ f$ — гомотетия $H(0, \alpha_1)$, и значит,

$$f = g \circ H(0, \alpha_1),$$

что и доказывает требуемое утверждение.

50. Собственные и зеркальные преобразования подобия

Определение 50.1. Говорят, что преобразование подобия f плоскости Π является *собственным* (соответственно *зеркальным*) *преобразованием подобия*, если оно может быть представлено в виде $f = d \circ g$, где d есть растяжение с положительным коэффициентом, а g — собственное (соответственно зеркальное) движение.

Предложение 50.2. *Никакое преобразование подобия плоскости* Π *не может быть собственным и зеркальным одновременно.*

Доказательство. Действительно, из соотношения $d \circ g = \delta \circ \gamma$ получаем $\delta^{-1} \circ d = \gamma \circ g^{-1}$; это есть соотношение вида

(растяжение с положительным коэффициентом) =
= (движение).

Такое соотношение возможно только в том случае, когда оба члена равенства — переносы; следовательно, $\gamma \circ g^{-1}$ есть собственное движение, т. е. γ и g либо оба собственные движения, либо оба зеркальные движения.

Теорема 50.3. 1. *Произведение двух преобразований подобия есть собственное преобразование подобия, если оба данных преобразования являются собственными или оба они зеркальные; если же одно из преобразований подобия собственное, а второе — зеркальное, то их произведение есть зеркальное преобразование подобия.*

2. *Множество S^+ собственных преобразований подобия образует группу; эта группа действует транзитивно на множестве пар (x, y) различных между собой точек плоскости* Π.

Доказательство. 1. Пусть $f, g \in S$; в плоскости $(\Pi, 0)$ преобразование подобия $\bar{f}$:

$$x \to \frac{1}{\lambda}(f(x) - f(0)),$$

где λ — коэффициент подобия преобразования f, принадлежит группе $\mathcal{I}_0$; поэтому получаем соотношение

$$f(x) = f(0) + \lambda\bar{f}(x).$$

Аналогично,

$$g(y) = g(0) + \mu\bar{g}(y),$$

где $\bar{g} \in \mathcal{I}_0$.

Следовательно, поскольку g линейно,

$$g \circ f(x) = g \circ f(0) + \lambda\mu\bar{g} \circ \bar{f}(x).$$

Но если назвать (как это иногда делают *)) собственные преобразования **четными**, а зеркальные — **нечетными**, то в соответствии с определением 50.1 четности преобразований f, g и $g \circ f$ будут соответственно совпадать с четностями преобразований $\bar{f}$, $\bar{g}$ и $\bar{g} \circ \bar{f}$, откуда следует справедливость утверждения.

2. Непосредственно из только что доказанного следует что S^+ есть группа. Оставшаяся часть утверждения следует из предложения 49.3, потому что, положив $X = \{x, y\}$ и $X' = \{x', y'\}$, где $x \neq y$ и $x' \neq y'$, получаем, что отображение $x \to x'$, $y \to y'$ множества X на множество X' есть преобразование подобия f множества X, а из двух преобразований подобия плоскости Π, являющихся продолжениями отображения f, одно является собственным, а второе — зеркальным.

---

*) Эта терминология используется во французской (pair, impair) и в немецкой (gerade, ungerade) математической литературе — но не в английской, и не в русской.

Из доказанного следует, что на множестве

$$A = (\Pi \times \Pi \setminus \text{диагональ}),$$

на котором выбрана в качестве начала произвольная пара (x_0, y_0), может быть каноническим образом задана структура группы, изоморфной S^+, с нейтральным элементом (x_0, y_0); такое отождествление A с S^+ удобно: оно позволяет, например, задать на S^+ топологию, вводимую как образ топологии пространства A (рассматриваемого как подпространство пространства $\Pi \times \Pi$) при каноническом отображении множества A на S^+.

Предложение 50.4. *Всякое растяжение (с положительным или отрицательным коэффициентом) есть собственное преобразование подобия.*

Действительно, любое растяжение есть произведение переносов, положительных гомотетий и центральных симметрий, а каждое из этих преобразований является собственным преобразованием подобия.

51. Группа преобразований подобия с одной неподвижной точкой

Предложение 51.1. 1. *Группа S_0 преобразований подобия, оставляющих неподвижной некоторую точку* 0, *есть прямое произведение подгруппы положительных гомотетий с центром* 0 *(изоморфной $\overset{*}{R}_+$) и группы движений $\mathcal{I}_0$.*

2. *Подгруппа S_0^+ этой группы, образованная собственными преобразованиями подобия, коммутативна и действует однотранзитивно на* Π^* *(т. е. на* Π *без точки* 0).

Доказательство. 1. Пусть $f, g \in S_0$ и λ, μ — их коэффициенты подобия; можно единственным образом представить f и g в виде $f = \lambda \bar{f}$, $g = \mu \bar{g}$, где $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{I}_0$. Следовательно,

$$f \circ g(x) = \lambda \bar{f}(\mu \bar{g}(x)) = (\lambda\mu)(\bar{f} \circ \bar{g})(x),$$

или иначе,

$$f \circ g = (\lambda\mu)(\bar{f} \circ \bar{g}).$$

Поэтому отображение $f \to (\lambda, \bar{f})$ группы S_0 на прямое произведение $\overset{*}{R}_+ \times \mathcal{J}_0$ групп есть изоморфизм.

2. В частности, S_0^+ изоморфна группе $R_+^* \times \mathcal{R}_0$; поскольку обе группы-сомножители коммутативны, то S_0^+ также коммутативна.

По теореме 50.3, для любых $x, x' \in \Pi^*$ найдется, и притом единственным образом, собственное преобразование подобия f, переводящее пару $(0, x)$ в $(0, x')$; так как $f(0) = 0$, имеем также $f \in S_0^+$, откуда следует утверждение.

51.2. *Приложение к определению поля комплексных чисел.*

Фиксируем некоторую точку $e \in \Pi^*$. Из второй части предложения 51.1 следует, что отображение φ группы S_0^+ на Π^*, определяемое как $f \to f(e)$, взаимно однозначно.

Перенесем на Π^* при помощи отображения φ заданную на S_0^+ групповую структуру и обозначим мультипликативно операцию в Π^*, являющуюся образом произведения в группе S_0^+ при отображении φ; распространим, наконец, эту операцию на Π, положив для любого $x \in \Pi$

$$x0 = 0x = 0.$$

Для всех $x, y \in \Pi^*$ элемент группы S_0^+, переводящий e в xy, есть произведение элементов f и g группы S_0^+, переводящих e в x и y соответственно; другими словами, $xy = f \circ g(e) = f(y)$; очевидно, что это соотношение выполняется и при $y = 0$.

Так как f линейно, то для всех $a, b \in \Pi$

$$x(a + b) = f(a + b) = f(a) + f(b) = xa + xb.$$

Теперь легко убедиться в том, что множество Π, на котором задано сложение, определенное на центрированной плоскости $(\Pi, 0)$, и умножение, которое мы только что ввели, есть поле, нулем которого является точка 0, а единицей — точка e.

Таким образом, налицо все элементы корректного определения комплексного числа. Пусть i — один из двух векторов системы $(\Pi, 0)$, которые перпендикулярны e и норма которых равна $\| e \|$, и пусть f — вращение, переводящее e в i.

Из отношения $i \perp e$ следует, что $f(i) \perp f(e)$ или $f(i) \perp i$; следовательно, $f(i) = e$ или $f(i) = -e$; другими словами, по определению умножения

$$i^2 = -e \quad \text{или} \quad i^2 = e.$$

Второе решение влечет $(e+i)(e-i) = e - i^2 = 0$, что невозможно ни в каком поле; следовательно,

$$i^2 = -e.$$

Векторы e, i образуют базис системы $(\Pi, 0)$; поэтому любой элемент $x \in \Pi$ может быть представлен в виде

$$x = \alpha e + \beta i, \quad \text{где} \quad \alpha, \ \beta \in R.$$

Однако, если отождествить каждое $\lambda \in R$ с точкой λe плоскости $(\Pi, 0)$, то становится очевидным, что для любого $u \in (\Pi, 0)$ точка λu есть результат умножения λe на u; можно, следовательно, в дальнейшем писать

$$x = \alpha e + \beta i = \alpha + \beta i, \quad \text{где} \quad \alpha, \ \beta \in R.$$

Тогда

$$(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \alpha'\beta).$$

Структура определяемого таким образом на Π поля, очевидно, изоморфна структуре поля, задаваемого на $R \times R = R^2$ с помощью операций

$$(\alpha, \ \beta) + (\alpha', \ \beta') = (\alpha + \alpha', \ \beta + \beta'),$$

$$(\alpha, \ \beta) \times (\alpha', \ \beta') = ((\alpha\alpha' - \beta\beta'), \quad (\alpha\beta' + \alpha'\beta)).$$

Обычно предпочитают называть полем C комплексных чисел плоскость R^2, на которой заданы эти последние операции, а структуру поля, определяемую на $(\Pi, 0, e)$, рассматривают лишь как удобную геометрическую модель поля C.

52. Структура преобразований подобия

Мы уже знаем структуру преобразований подобия с коэффициентом подобия $k = 1$; при коэффициенте подобия $k \neq 1$ структура таких преобразований гораздо однообразнее.

Предложение 52.1. *Всякое преобразование подобия f плоскости* П, *коэффициент подобия которого* $k \neq 1$, *имеет неподвижную точку* (называемую **центром** преобразования f).

Самым элегантным доказательством было бы следующее: так как неподвижные точки преобразований f и f^{-1} совпадают, можно при отыскании их положить $k < 1$; тогда отображение f есть сжимающее отображение с коэффициентом $k < 1$; следовательно, так как П — полное метрическое пространство, f имеет неподвижную точку, которая совпадает с пределом любой последовательности $\{f^n(a)\}$ (a — произвольная точка плоскости П).

Но это доказательство использует неэлементарные понятия; более того, оно основано на утверждении, что R удовлетворяет аксиоме непрерывности, аксиоме, без которой можно обойтись в элементарной геометрии; поэтому здесь мы от него отказываемся.

Доказательства, основанные на понятиях угла и вмещающей дуги, были нами решительно отвергнуты по другой причине: в них используются углы и окружности для решения вопросов, относящихся к линейной алгебре.

Правильный подход заключается в отыскании решения векторного уравнения

$$f(0) + k\bar{f}(x) = x, \quad \text{где} \quad \bar{f} \in \mathcal{I}_0;$$

решение ищется в фиксированной плоскости (П, 0).

1. Если $\bar{f} \in \mathcal{S}_0$, то относительно пары осей, первая из которых есть ось симметрии $\bar{f}$, это уравнение запишется так:

$$kx_1 + a_1 = x_1; \quad -kx_2 + a_2 = x_2;$$

отсюда легко получаем выражения для x_1 и x_2.

2. Если $f \in \mathcal{R}_0$, то в плоскости $(\Pi, 0)$, на которой задана структура поля путем выбора единицы e (см. 51.2), это уравнение запишется так:

$$f(0) + \alpha z = z, \quad \text{где} \quad \alpha \neq e;$$

отсюда

$$z = f(0)/(1 - \alpha).$$

Предложение 52.1 описывает структуру преобразований подобия с коэффициентом подобия $k \neq 1$. Действительно, пусть f — преобразование подобия с центром a и с коэффициентом подобия k.

Если f — собственное преобразование, то оно является элементом группы S_a^+.

Если f — зеркальное преобразование, то оно есть произведение гомотетии $H(a, k)$ и некоторой осевой симметрии, ось l которой проходит через a; эта ось называется осью преобразования подобия f *).

53. Классификация замкнутых групп преобразований подобия

В геометрии, и даже в анализе рассматриваются только те группы преобразований, которые замкнуты относительно естественной топологии, задаваемой [1]) на

---

*) Само преобразование f в этом случае иногда называют *центрально-подобной симметрией* (с центром a, осью l и коэффициентом k).

[1]) Относительно некоторого фиксированного базиса плоскости Π всякое аффинное преобразование f плоскости Π записывается в виде

$$x' = ax + by + c; \quad y' = a'x + b'y + c', \quad \text{где} \quad ab' - ba' \neq 0.$$

Если отождествить множество преобразований f с множеством точек (a, b, c, a', b', c') пространства R^6, таких, что $ab' - ba' \neq 0$, то естественно задать на этом множестве топологию, индуцированную на нем топологией пространства R^6; отсюда получаем топологию на множестве $\mathcal{A}$ аффинных преобразований. Легко показать, что эта топология не зависит от выбора базиса в плоскости Π и что при такой топологии операции $f \to f^{-1}$ и $(f, g) \to f \circ g$ непрерывны.

Говорят, что подгруппа группы $\mathcal{A}$ **з а м к н у т а**, если она есть замкнутое подмножество топологического пространства $\mathcal{A}$.

группе всех аффинных преобразований с помощью коэффициентов матриц, определяющих эти преобразования (относительно некоторого фиксированного базиса). В упражнениях мы предложим задачу систематического исследования некоторых замкнутых подгрупп группы преобразований подобия; здесь же мы ограничимся лишь описанием некоторой классификации этих подгрупп.

Изучение некоторых из этих групп необязательно в курсе обучения; они включаются в программу по выбору. Нам будет удобно познакомиться с замкнутыми подгруппами групп R, R^2 и мультипликативных групп R^*, C^*.

Для аддитивной группы поля R вещественных чисел нас будут интересовать само R и дискретные группы $\{n\alpha\}_{n \in Z}$, где $\alpha \in R$. Для аддитивной группы вещественной плоскости R^2 (аддитивной группы плоских векторов) рассмотрим линейные взаимно однозначные отображения плоскости R^2 на себя; тогда замкнутыми подгруппами будут образы следующих подгрупп *)

$$R^2, \quad Z^2, \quad R \times Z, \quad R \times \{0\}, \quad Z \times \{0\}, \quad \{0\} \times \{0\}.$$

Для C^* замкнутыми подгруппами будут образы замкнутых подгрупп аддитивной группы C (изоморфной аддитивной группе плоскости R^2) при отображении $z \to e^z$ множества C комплексных чисел на C^*. В частности, замкнутыми подгруппами группы R^* будут группы

$$R^*, \quad R^*_+ \text{ и каждое из множеств } \{k^n\}_{n \in Z}, \text{ где } k \neq 0.$$

53.1. *Замкнутые группы растяжений плоскости* П (или, в более общем случае, — евклидова пространства).

---

*) Геометрическим образом группы Z^2 (аддитивной группы множества целочисленных векторов) служит плоская *решетка* — множество точек плоскости с целочисленными координатами.

Пусть $(E, 0)$ — центрированное евклидово пространство размерности n. Для простоты изложения отождествим всякое отображение вида $x \to x + a$ пространства E на себя с точкой a пространства $(E, 0)$; при этом группы переносов пространства E можно представить как подгруппы пространства $(E, 0)$.

a) Переносы. Рассмотрим линейные отображения пространства R^n на $(E, 0)$. Замкнутыми группами переносов пространства E будут образы при таких отображениях подгрупп пространства R^n, имеющих вид $R^p \times Z^q \times \{0\}^r$ (где $p + q + r = n$).

b) Центральные симметрии и переносы. Для всякой замкнутой подгруппы G группы $(E, 0)$ группа, порождаемая центральными симметриями с центрами, принадлежащими G, будет замкнутой.

c) Другие группы. Для всякого аффинного подпространства A пространства E (включая пространство, состоящее из одной точки) и всякой замкнутой подгруппы G группы R^* группа растяжений

$$x \to kx + a, \quad \text{где} \quad k \in G \quad \text{и} \quad a \in A,$$

замкнута.

53.2. *Замкнутые группы движений плоскости* Π *).

a) Замкнутые группы движений с одной неподвижной точкой 0.

Таковыми являются $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{R}_0$, конечные группы вращений (порождаемые вращением на угол $2\pi/n$), конечные группы осевых симметрий и вращений (порождаемые парой осевых симметрий, угол между осями которых равен $2\pi/n$).

b) Для всякой замкнутой подгруппы G группы $\mathcal{I}_0$ такой будет группа, порожденная группой G и переносами плоскости Π.

---

*) Ср. Мальцев А. И., Группы и другие алгебраические системы, в книге «Математика, ее содержание, методы и значение», т. III, М., Изд-во АН СССР, 1956, стр. 268—275.

c) Бесконечные дискретные группы движений [1]).

К таким группам относятся произвольные подгруппы следующих групп:

Группа, порождаемая четырьмя осевыми симметриями, осями которых являются стороны некоторого прямоугольника;

Группа, порождаемая тремя осевыми симметриями, осями которых являются стороны равностороннего треугольника (соответственно равнобедренного прямоугольного треугольника).

Эти подгруппы очень разнообразны; приведем в качестве примера некоторые из них:

Группа, порождаемая некоторым зеркальным движением;

Группа, порождаемая двумя вращениями на 60° (или на 120°) с разными центрами.

Примечателен тот факт, что в любой бесконечной дискретной группе движений период всякого вращения может быть равен только 2, 3, 4 и 6; специалисты по декоративному искусству открыли это ограничение очень давно.

53.3. *Другие замкнутые группы преобразований подобия плоскости* Π.

a) Группы собственных преобразований подобия с одной неподвижной точкой 0.

Отождествим плоскость Π^* с мультипликативной группой C^*; тогда замкнутыми группами будут упомянутые выше замкнутые подгруппы группы C^* — и только они.

b) Группы произвольных преобразований подобия с неподвижной точкой 0. В качестве упражнения предоставляем читателю найти их.

c) Для любой замкнутой подгруппы G преобразований подобия с неподвижной точкой 0 замкнутой будет группа $\mathscr{A}$, порождаемая группой G и переносами плоскости Π.

---

[1]) Так называют подгруппы группы аффинных преобразований, которым отвечают дискретные подмножества полной группы (т. е. группы всех аффинных преобразований), т. е. множества, состоящие из одних только изолированных точек.

§ 3. МНОЖЕСТВА, УСТОЙЧИВЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ *)

54. Регулярность множества

Впечатление правильности или симметричности, которое возникает у нас при взгляде на некоторые множества, может быть объяснено с математической точки зрения тем, что эти множества устойчивы относительно некоторой группы преобразований; эта устойчивость и придает им определенную однородность.

Точнее, если E — некоторое множество и $\mathscr{E}$ — группа преобразований этого множества, причем каждое из этих преобразований сохраняет какие-то свойства множества E, достаточно легко непосредственно воспринимаемые органами чувств, то создается впечатление «симметричности» множества E. Это впечатление усиливается с обогащением множества $\mathscr{E}$. Конечно, сказанное вовсе не означает, что чем богаче элементами множество $\mathscr{E}$, тем множество E «красивее» — ведь понятие красоты субъективно и не может быть описано **) в строгих математических терминах.

Например, говорят, что пара $(E, \mathscr{E})$ есть однородное пространство, если $\mathscr{E}$ действует транзитивно на E, т. е. если для любых $x, y \in E$ найдется такое $f \in \mathscr{E}$, что

$$f(x) = y.$$

В тех случаях, когда элементы множества $\mathscr{E}$ таковы, что они не воспринимаются достаточно непосредственно органами чувств наблюдателя, может оказаться, что правильность множества E останется незамеченной. Например, *гомеоморфизм* (непрерывное взаимно однозначное преобразование, обратное к которому также непрерывно) ни в какой степени не воспринимается наблюдателем нематематиком, и простые замкнутые кривые, несмотря на их однородность

---

*) В связи с содержанием этого параграфа см. превосходную книгу Вейля [32].

**) По крайней мере в настоящее время.

относительно группы гомеоморфизмов, обычно не производят впечатления правильных множеств.

Иначе говоря, ощущение симметричности возникает лишь тогда, когда преобразования из $\mathscr{E}$ сохраняют в каком-то подходящем смысле «форму» множества E. Например, аффинные преобразования воспринимаются уже легче, чем гомеоморфизмы, но они обычно еще кажутся несколько нескладными, корявыми. Поэтому пары $(E, \mathscr{E})$, которые — за неимением лучшего слова — принято обычно называть правильными или симметричными — это те, для которых E есть часть евклидова пространства, а каждый элемент множества $\mathscr{E}$ есть ограничение на E некоторого движения этого пространства, или, в виде исключения, преобразования подобия *).

Мы рассматриваем здесь только элементы симметрии (точечных) множеств; в исследовании, в большей степени ориентированном на эстетику, механику или физику, следовало бы также принять во внимание свойства симметрии цвета (учитывая здесь все оттенки видимого спектра), массы, химического состава, электромагнитных свойств и т. д.

55. Построение правильных пар $(E, \mathscr{E})$

Мы намерены дать последовательное описание процесса построения правильных пар $(E, \mathscr{E})$, который был бы применим как для плоскости, так и для пространства.

Пусть A — некоторое множество и $\mathscr{A}$ — группа преобразований, определенных на этом множестве.

Для любого $X \subset A$ и любого $f \in \mathscr{A}$

$$f(X) \subset f(A) = A.$$

*) Для иллюстрации этого положения укажем, что каждому непредубежденному наблюдателю *окружность*, группа самосовмещений которой состоит из движений, покажется более правильно устроенной или «более симметричной», чем *логарифмическая спираль*, группа самосовмещений которой состоит из преобразований подобия, хоть и последняя кривая представляется достаточно «симметричной» даже человеку, незнакомому с наличием транзитивной группы ее самосовмещений, образованной преобразованиями подобия.

Положим

$$\mathscr{A}(X) = E = \bigcup_{f \in \mathscr{A}} f(X).$$

Для любого $g \in \mathscr{A}$

$$g(E) = g\left(\bigcup_{f} f(X)\right) = \bigcup_{f} g \circ f(X).$$

Однако $\mathscr{A}$ — группа; следовательно, множество преобразований вида $g \circ f$ (где f пробегает $\mathscr{A}$) совпадает с $\mathscr{A}$; поэтому

$$g(E) = E \text{ для всех } g \in \mathscr{A}.$$

Обозначим через $\mathscr{E}$ множество ограничений на E преобразований из $\mathscr{A}$; тогда $\mathscr{E}$ — группа преобразований множества E (очевидно, может случиться так, что при соответствующем выборе X множество E будет устойчиво относительно еще каких-то интересных преобразований, не входящих в $\mathscr{E}$).

Говорят, что пара $(E, \mathscr{E})$ порождается множеством X в паре $(A, \mathscr{A})$; на языке декоративного искусства можно было бы сказать, что X есть ***мотив***, порождающий E.

Отображение, которое каждому $f \in \mathscr{A}$ ставит в соответствие его ограничение из группы $\mathscr{E}$, есть представление группы $\mathscr{A}$ на группе $\mathscr{E}$; в общем случае оно не взаимно однозначно.

Самые простые мотивы — это множества, сводящиеся к одной точке: для любого $x \in A$ множество $E = \mathscr{A}(\{x\})$ называется траекторией точки x относительно группы $\mathscr{A}$; каждая траектория есть класс эквивалентности по следующему отношению эквивалентности на A:

$$(x \sim y), \text{ если существует такое преобразование } f \in \mathscr{A}, \text{ что } f(x) = y.$$

Различные траектории множества A могут иметь различную структуру; например, если $\mathscr{A}$ — группа, порождаемая на плоскости A двумя осевыми симметриями с взаимно перпендикулярными осями, то траектории могут содержать одну, две или четыре точки.

Из соотношения

$$\mathscr{A}\left(\bigcup_i X_i\right)=\bigcup_i \mathscr{A}(X_i)$$

следует, что каждое множество $\mathscr{A}(X)$ есть объединение траекторий; следовательно, множества E будут известны, если только известны все траектории множества A.

Случай евклидовых пространств.

Если A — плоскость (или, в более общем случае, евклидово пространство некоторой размерности n) и $\mathscr{A}$ — группа преобразований подобия, то представляют интерес главным образом лишь те случаи, когда $\mathscr{A}$ — замкнутая группа, и такие пары $(E, \mathscr{E})$, в которых E замкнуто.

Классификация замкнутых групп подобия, приведенная выше, упрощает изучение множеств E, устойчивых относительно такой группы; это будут, действительно, объединения траекторий, а нахождение этих траекторий незатруднительно для всех групп, точно описанных ранее.

Заметим, что большинство таких групп приводит к неинтересным множествам E, — например, в случае, когда каждая траектория совпадает со всем пространством A! Зато бесконечные дискретные группы движений и группы собственных преобразований подобия с одной неподвижной точкой порождают множества, приятные для глаз, т. е. декоративно ценные*).

56. Элементы симметрии заданного множества

Мы только что видели, как для любой группы $\mathscr{A}$ преобразований подобия плоскости Π можно найти множества E, устойчивые относительно $\mathscr{A}$; кроме того, мы уже отмечали, что такое множество E может

*) Соответствующие идеи широко использовались голландским графиком Морисом Эшером (см. его альбом Esher M. C., Grafiek en Tekeningen, Zwolle, 1959 и след., из которого, в частности, заимствована суперобложка русского издания книги Г. Вейля [32]).

оказаться устойчивым относительно преобразований подобия, не входящих в $\mathscr{A}$. В общем случае вопрос ставится так: для любого $E \subset \Pi$ найти множество $\mathscr{E}$ преобразований подобия f плоскости Π, таких, что $f(E) = E$; это множество, очевидно, образует группу $\mathscr{G}$ *).

В элементарной геометрии по установившейся традиции рассматриваются только оси симметрии и центры симметрии множества E, т. е. те элементы группы $\mathscr{G}$, которые являются осевыми или центральными симметриями. Однако множество этих симметрий в общем случае не образует группу; таким образом, упускается отличная возможность изучения группы преобразований и из рассмотрения исключаются композиции полученных симметрий. С другой стороны, ограничиваясь только симметриями, обычно забывают существенную роль сдвигов и гомотетий. Например, наилучший способ дать определение цилиндра и конуса в R^n заключается в том, чтобы определить конус с вершиной 0 как множество, устойчивое относительно группы положительных гомотетий с центром 0, а цилиндр с образующими направления δ — как множество, устойчивое относительно группы переносов в направлении δ.

Тем не менее, оси симметрии и центры симметрии точечных множеств имеют первостепенное значение; весьма существенно, чтобы ученик умел распознавать элементы симметрии следующих простых множеств:

Прямая, луч, отрезок, пара точек;

Объединение двух прямых (пересекающихся — перпендикулярных или нет, параллельных);

Объединение двух лучей с общим началом;

Равносторонний треугольник; равнобедренный треугольник; прямоугольник.

Позднее будут изучены элементы симметрии объединения двух окружностей или окружности и прямой.

---

*) Эту группу можно было бы назвать *группой симметрии* множества E, хотя чаще последнее наименование присваивается группе движений, переводящих E в себя.

Два простых принципа являются направляющими при отыскании осей и центров симметрии:

1. Если множества A, B устойчивы относительно некоторой симметрии φ, то устойчивы и множества $A \cup B$, $A \cap B$, а также дополнения множеств A и B.

2. Пусть φ — некоторая симметрия; для любого X множества $X \cap \varphi(X)$ и $X \cup \varphi(X)$ устойчивы относительно φ.

Вот еще одно очень полезное свойство:

3. Пусть (D_i) — конечное семейство попарно различных прямых; тогда каждая прямая, содержащаяся в множестве $\bigcup D_i$, есть одна из прямых D_i.

Действительно, каждая прямая содержит бесконечное число точек, следовательно, она пересекается с какой-то прямой D_i по крайней мере в двух точках («принцип клеток» Дирихле *)) и, следовательно, совпадает с этой прямой.

Очевидно, аналогичное утверждение имеет место для семейства окружностей и для семейства окружностей и прямых; можно даже (используя тот факт, что мощность континуума превышает мощность счетного множества) распространить это утверждение на случай счетных семейств.

Мы рассмотрим только один простой

Пример. Предположим известным, что осями симметрии некоторой прямой D являются сама прямая D и все перпендикуляры к ней, и только эти прямые. Найдем теперь оси симметрии объединения двух несовпадающих параллельных прямых A, B.

Общими осями для A и B будут перпендикуляры к A и B; с другой стороны, A и B симметричны относительно прямой D, равноудаленной от этих прямых и параллельной им; следовательно, D — ось симметрии множества $A \cup B$.

Остается показать, что множество $A \cup B$ не имеет никаких других осей симметрии.

---

*) Обычная формулировка «принципа клеток» Л. Дирихле такова: если m зайцев рассажены по n клеткам и $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят два зайца.

Допустим противное: пусть φ — симметрия с осью C, такая, что

$$\varphi(A \cup B) = A \cup B.$$

Из включения $\varphi(A) \subset A \cup B$ в соответствии с указанным выше свойством 3 следует, что прямая $\varphi(A)$ совпадает либо с прямой A, либо с прямой B; если $\varphi(A) = A$, то C есть ось симметрии прямой A и так как решение $C = A$ сразу исключается, то C перпендикулярна A; если же $\varphi(A) = B$, то, как легко видеть, C не может пересекать ни A, ни B, являясь, таким образом, параллельной прямым A и B и равноудаленной от этих прямых, т. е. C совпадает с найденной уже ранее прямой D.

Упражнения к главе IV

1. Пусть A, B — две прямые плоскости Π. Для любого $x \in \Pi$ обозначим через $\alpha(x), \beta(x)$ расстояние от x до прямых A и B соответственно и положим $f(x) = \alpha(x) + \beta(x)$. Каково множество таких точек x, для которых $f(x) \leqslant l$ (или $f(x) = l$), где l — заданное положительное число?

Пусть D — произвольная прямая; найти точки x этой прямой, минимизирующие функцию $f(x)$; при каких условиях это будет единственная точка?

2. Пусть (D_i) — конечное семейство прямых; для любого $x \in \Pi$ расстояние от точки x до прямой D_i обозначим через $\alpha_i(x)$. Показать, что все функции α_i выпуклы.

Вывести из этого свойства, что множество точек x, для которых

$$\sum \lambda_i \alpha_i(x) \leqslant l \quad (\text{где } \lambda_i \text{ и } l \text{ — неотрицательные числа}),$$

есть выпуклый многоугольник, ограниченный или нет.

3. Пусть D — прямая плоскости Π и $a, b \in \Pi$.

Для любого $x \in D$ положим $f(x) = d(a, x) + d(b, x)$.

Показать, что функция f выпукла; найти точки x прямой D, в которых функция f имеет минимум.

Решить аналогичную задачу для максимума функции $|d(a, x) - d(b, x)|$.

4. Пусть A, B — две несовпадающие параллельные прямые, и пусть $a, b \in \Pi$.

Найти точки $x \in A, y \in B$, минимизирующие сумму

$$d(a, x) + d(x, y) + d(y, b).$$

Решить аналогичную задачу для точек x, y, таких, что $\Delta(x, y)$ имеет заданное направление δ.

5. Пусть (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ — три пары точек плоскости Π, таких, что $d(a_1, b_1) = d(a_2, b_2) = d(a_3, b_3)$. Существуют ли такие три прямые D_i и такая пара (a, b) точек плоскости Π, что для любого i пара (a_i, b_i) симметрична паре (a, b) относительно прямой D_i?

6. Пусть f (соответственно g) — вращение на угол θ вокруг точки x (соответственно на $-\theta$ вокруг точки y). Найти $g \circ f$.

7. Пусть (a_1, a_2, a_3) — тройка различных точек плоскости Π; обозначим через $\hat{a}_i$ углы этой тройки (см. следующую главу). Найти произведение $f_3 \circ f_2 \circ f_1$, где f_i — вращение на угол $\hat{a}_i$ вокруг точки a_i.

8. Пусть $a, b \in \Pi$ и $a \neq b$; далее, пусть f — вращение с центром в точке a.

a) Найти множество $\mathscr{B}$ вращений g с центром в точке b, таких, что $g \circ f$ есть вращение.

b) Найти множество центров всех вращений $g \circ f$ (где $g \in \mathscr{B}$).

9. Пусть $\mathscr{G}$ — подгруппа группы $\mathscr{I}_0$; показать, что если $\mathscr{G}$ содержит хотя бы одну осевую симметрию, то $\mathscr{G}$ порождается входящими в нее осевыми симметриями.

10. Найти порядок группы самосовмещений для следующих множеств X (здесь ищутся лишь д в и ж е н и я, переводящие X в себя *)):

Множество вершин равностороннего треугольника, квадрата, прямоугольника, ромба.

11. Пусть A, B — две прямые плоскости Π, и пусть $a \in A$, $b \in B$.

Исследовать собственные движения f, для которых $f(a) \in A$ и $f(b) \in B$.

12. Пусть Z — метрическое подпространство пространства R, образованное множеством целых чисел. Определить все разбиения пространства Z на два изометричных множества.

Аналогичная задача для N, для R и для R_+.

13. Определить все разбиения плоскости Π на два изометричных множества.

14. Пусть A, B — два подмножества плоскости Π, такие, что $A \cap B$ содержит по крайней мере две точки, x_1 и x_2. Показать, что если существует движение f, отображающее множество A на множество B и такое, что его ограничение на $A \cap B$ есть тождественное преобразование, то либо f — тождественное преобразование, либо

$$A \cap B = (A \cup B) \cap \Delta(x_1, x_2).$$

Исследовать связь между этим свойством и тем фактом, что линия сгиба листа бумаги всегда есть отрезок прямой.

---

*) Почему?

15. Пусть f — собственное преобразование подобия плоскости П и λ — произвольное число. Для любого $x \in \Pi$ обозначим через $f_\lambda(x)$ точку, делящую $(x, f(x))$ в отношении λ. Что можно сказать об отображении $x \to f_\lambda(x)$?

16. Пусть A_i $(i = 1, 2, 3)$ — три прямые плоскости П, и $a_i \in A_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

a) Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ собственных преобразований подобия f, таких, что $f(a_i) \in A_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Показать, что либо все эти преобразования подобия имеют общий центр a, либо все они — переносы.

Рассмотрим произвольную точку x плоскости П, такую, что $x \neq a$.

Что можно сказать о множестве точек $f(x)$, где $f \in \mathcal{F}$?

b) Пусть $\mathcal{G}$ — множество собственных преобразований подобия g, таких, что $a_i \in g(A_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Какова связь между $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$?

17. Пусть $(0, a, b)$ — тройка точек плоскости П, такая, что a и b отличны от 0. Описать такие отображения f плоскости П в себя, при которых для всех $x \in \Pi$ тройка $(0, x, f(x))$ либо совпадает с тройкой $(0, 0, 0)$, либо есть образ тройки $(0, a, b)$ при некотором собственном преобразовании подобия.

18. Пусть E — произвольное множество и $\mathcal{G}$ — коммутативная и однотранзитивная группа преобразований множества E.

Пусть a, b — две точки множества E и f — такое отображение E в себя, что для любого $x \in E$ существует такое $g \in \mathcal{G}$, что

$$g(a) = x \quad \text{и} \quad g(b) = f(x).$$

Что можно сказать о преобразовании f?

19. Воспользовавшись решением упр. 9 к гл. II, построить классификацию замкнутых групп растяжений плоскости П (и пространства R^n), указанных в п. 53.

Упражнения на сопряженные преобразования. Напомним, что если f и g — два преобразования некоторого множества E, то сопряженным образом преобразования f относительно преобразования g называется преобразование $g \circ f \circ g^{-1}$; при любом x оно переводит $g(x)$ в $g(f(x))$.

20. Пусть f — гомотетия с центром a и коэффициентом k. Показать, что сопряженным образом преобразования f относительно любого преобразования подобия g (и даже вообще относительно любого аффинного преобразования) будет гомотетия с центром $g(0)$ и с коэффициентом k (рассмотреть сначала случай $g(0) = 0$ и случай, когда g — перенос).

21. Показать, что сопряженным образом любого переноса $x \to x + b$ относительно линейного преобразования g будет перенос $x \to x + g(b)$.

22. Пусть f — осевая симметрия с осью D и g — произвольное преобразование подобия; показать, что сопряженным образом f относительно преобразования g будет осевая симметрия с осью $g(D)$.

23. Пусть f_i — осевая симметрия с осью D_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) и g — произвольное преобразование подобия. Показать, что сопряженным образом $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$ относительно g будет преобразование $f_1' \circ f_2' \circ \ldots \circ f_n'$, где f_i' — осевая симметрия с осью $g(D_i)$.

24. Пусть f — вращение на угол θ вокруг точки a. Показать, что сопряженным образом преобразования f относительно некоторого преобразования подобия g будет вращение вокруг точки $g(a)$ (на угол θ, если g — собственное преобразование, и на угол $-\theta$, если g — зеркальное преобразование).

ГЛАВА V

УГЛЫ

§ 1. ГРУППА УГЛОВ

57. Трудности, связанные с понятием угла

Понятие угла, без сомнения, порождает в преподавании геометрии больше всего споров и трудностей.

Эти трудности возникают отчасти из-за терминологических неточностей, отчасти из-за создавшейся здесь мешанины из нескольких математических понятий, обозначаемых одним и тем же термином «угол», но по существу совершенно различных, а частично также из-за реальной сложности этого вопроса.

Путаница возникает, прежде всего, из-за использования одного слова «угол» для обозначения понятий более или менее связанных, но вовсе не идентичных: плоский сектор, пара лучей, некоторая мера («угловая мера») и т. д. *)

Наименее разработанным определением является следующее: *углом* с вершиной в точке 0 — или плоским сектором — называется пересечение двух замкнутых полуплоскостей, граничные прямые которых различны и проходят через 0.

Это определение хорошо приспособлено для изображения угла на чертеже, для вырезания, для изме-

---

*) Вот четыре наиболее распространенных (но совсем разных!) подхода к понятию «угла»: 1° геометрическая фигура, образованная парой лучей с общим началом (подход Д. Гильберта [2]); 2° часть плоскости (ограниченная «углом» в смысле 1°); 3° мера вращения, определенная так, что совпадение двух вращений равносильно совпадению их центров и углов поворота (здесь «угол» есть «величина» α, заключенная в пределах $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ или $-\pi < \alpha \leqslant \pi$); 4° аргумент тригонометрических функций (заметим, что сложение без всяких трудностей определяется лишь для «углов» в смысле 4°).

рений транспортиром, одним словом, для «интуитивной» геометрии детей до 12—13 лет. Однако оно приводит к затруднениям, как только требуется сложить много довольно больших углов; при этом часто даются путаные объяснения и определения, в которых используются измеряемые «по спирали» углы (бо́льшие 360°) *); это затемняет вопрос и служит причиной того, что к понятию угла начинают относиться, как к западне.

Некоторых трудностей удается избежать, несколько разгрузив понятие угла: угол становится не частью плоскости, а упорядоченной парой лучей с общим началом. Однако часть трудностей остается; они связаны со сложением двух углов. Во избежание этих затруднений приходится сначала вводить некоторое отношение эквивалентности на множестве пар лучей и затем определять сложение на фактормножестве по этому отношению. Эта процедура математически совершенно корректна, но довольно громоздка и мало доступна большинству учащихся средней школы.

Чтобы избавиться от этой громоздкости, некоторые авторы постулируют существование «меры» на множестве упорядоченных пар лучей (не противоположно направленных) и аддитивность этой меры для «малых углов». При всей кажущейся строгости такая аксиоматика в конечном счете пагубна, так как в этом случае стираются существенные различия между группой углов и аддитивной группой R; например, тот факт, что в первой из этих групп из равенства $\theta+\theta=0$ не следует равенство $\theta=0$; с другой стороны, это определение плохо работает даже в самом начале курса элементарной геометрии, так как оно не допускает итерации очень простой операции удвоения $\theta \rightarrow 2\theta$.

Во всех корректных определениях углы выступают как нечто довольно абстрактное; задача преподавателя заключается в том, чтобы сделать эту абстрак-

*) Соответствующие конструкции приводят к своеобразным «многолистным образам», подобным римановым поверхностям теории функций комплексного переменного; педагогически они совершенно неприемлемы.

цию доступной, приняв определение, в котором используются только интуитивно ясные понятия.

Например, алгебраисту может показаться блестящим следующее определение.

Заметим сначала, что множество $\mathcal{T}$ переносов плоскости П образует нормальный делитель группы $\mathcal{I}^+$ собственных движений (так как сопряженный образ переноса относительно некоторого движения есть перенос); группой углов будет по определению факторгруппа $\mathcal{I}^+/\mathcal{T}$. Углом собственного движения f будет канонический образ этого движения в факторгруппе; для любой пары (A, B) лучей плоскости П, обозначив через f собственное движение, переводящее A в B, положим:

$$\text{угол } (A,\ B) \text{(обозначается) } \widehat{AB} = \text{угол отображения } f.$$

Такое определение предполагает хорошее знакомство с алгебраической теорией групп. Мы выберем более осязаемое определение, отождествив углы с вращениями вокруг некоторой точки 0; в дальнейшем будет показано, что выбор точки 0 несуществен.

В заключение этого обсуждения заметим, что мы смогли без каких бы то ни было неудобств построить значительную часть элементарной геометрии, даже не упомянув углов: аффинная структура плоскости П, теорема Пифагора, теория преобразований подобия не требуют использования углов и равенства треугольников.

Злоупотребление понятием угла в нашем преподавании имеет свои исторические причины: с одной стороны, углы входят в число простейших понятий аксиоматики Евклида и даже аксиома параллельных долгое время формулировалась в терминах углов*); с другой стороны, последователи Евклида сочли уместным повсюду использовать без всякого на то основания понятия направленного угла и угла между прямыми лишь потому, что они достаточно хорошо понимали эти понятия.

---

*) Здесь имеется в виду принятая Евклидом форма аксиомы параллельности (см. Евклид [1], ч. 1, стр. 15, постулат 5).

Более обоснована попытка построения почти всей геометрии без введения «меры» углов; будучи существенно необходимым орудием в анализе и прикладной математике, в геометрии она часто используется лишь из соображений удобства и подчас становится источником ошибок.

58. Определение и обозначения

Определение 58.1. Для любой точки $0 \in \Pi$ *углом с вершиной* в точке 0 называется каждое вращение с центром 0.

Для любой пары (A_1, A_2) лучей с общим началом 0 *углом* этой *пары* называют вращение, переводящее A_1 в A_2; этот угол обозначается через $\widehat{A_1 A_2}$.

Множество углов с вершиной в точке 0 есть, таким образом, не что иное, как множество вращений с центром 0; следовательно, это коммутативная группа. Традиционно принята аддитивная символика для групповой операции в этой группе; такое обозначение оправдано тем, что, как мы увидим ниже, понятие меры угла выявляет тесную связь между сложением действительных чисел и сложением углов.

Сравнение углов с разными вершинами. Понятие угла было бы почти бесполезным, если бы мы не умели сравнивать углы с разными вершинами. Перенос дает нам возможность произвести такое сравнение.

Для любых точек $a, b \in \Pi$ перенос $I_{b,a}$, переводящий a в b, есть изоморфизм (относительно структуры векторного пространства и структуры метрического пространства), отображающий центрированную плоскость (Π, a) на центрированную плоскость (Π, b); этот изоморфизм *транзитивен* в том смысле, что для любых a, b, $c \in \Pi$

$$I_{c,a} = I_{c,b} \circ I_{b,a}.$$

Так как вращения определены в терминах прямых и расстояний, изоморфизм $I_{b,a}$ индуцирует изоморфное отображение аддитивной группы углов с вершиной a на аддитивную группу углов с вершиной b; мы его будем обозначать тем же символом $I_{b,a}$. Таким образом, нам удобно воспользоваться здесь тем же методом, что и при определении множества N натуральных чисел.

Выберем на плоскости Π произвольное начало a и отождествим с помощью изоморфизма $I_{b,a}$ каждый угол с вершиной b с соответствующим углом с вершиной a. Транзитивность изоморфизмов I гарантирует согласованность такого отождествления. Пусть теперь A_1, A_2 — два произвольные луча с началом a; так как изоморфизм $I_{b,a}$ плоскости (Π, a) на плоскость (Π, b) переводит каждый луч A_i в параллельный ему луч B_i с началом в точке b, то, учитывая принятое отождествление, получаем [1])

$$\widehat{A_1A_2} = \widehat{B_1B_2}.$$

Это рассуждение оправдывает введение следующего определения, которое только внешне зависит от выбора начала 0:

Определение 58.2. В центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ *углом между двумя лучами* (D_1, D_2) с произвольными началами называется угол с вершиной 0 между лучами D_1', D_2' с общим началом 0, параллельными соответственно лучам D_1, D_2. Этот угол обозначается $\widehat{D_1D_2}$.

Аддитивная группа углов будет обозначаться через $\mathscr{A}$.

Дальнейшие обозначения

С обозначением $\widehat{D_1D_2}$ удобно связать некоторые производные обозначения. В общем случае пусть E —

[1]) Было бы легко построить семейства $(I'_{b,a})$ транзитивных изоморфизмов множества центрированных плоскостей (Π, x), для которых эти равенства не всегда бы выполнялись; но единственное «естественное» семейство изоморфизмов — это то, которое мы здесь рассмотрели.

множество каких-то математических объектов, таких, что с каждым из них связан луч плоскости П или множество параллельных лучей плоскости П. Для любых $x, y \in E$ будем обозначать через $\widehat{xy}$ угол между лучом, связанным с объектом x, и лучом, связанным с объектом y.

Например, с каждым вектором $x \neq 0$ плоскости $(\Pi, 0)$ связан луч $D(0, x)$; с каждой ориентированной прямой D связан положительный луч этой прямой; следовательно, можно говорить об угле $\widehat{xD}$. Аналогично, для любых $a, b, c \in \Pi$, таких, что $a \neq b$ и $c \neq b$, сокращенное обозначение $\widehat{abc}$ означает угол между лучами $D(b, a)$ и $D(b, c)$.

Нулевой угол и развернутый угол. В аддитивной группе $\mathscr{A}$ углов нейтральный элемент обозначается через 0, а угол, связанный с центральной симметрией с центром 0, — через ϖ (символ ϖ отдаленно напоминает π).

Таким образом, для любой пары (D_1, D_2) лучей с общим началом имеют место следующие эквивалентности:

$$(\widehat{D_1 D_2} = 0) \Leftrightarrow (D_1 = D_2),$$

$$(\widehat{D_1 D_2} = \varpi) \Leftrightarrow (D_1 \text{ и } D_2 \text{ противоположно направлены}).$$

Кроме того, $\varpi + \varpi = 0$, или $-\varpi = \varpi$.

Ф о р м у л а Ш а л я. Пусть A, B, C — три произвольных луча с общим началом 0; вращение, переводящее A в C, равно произведению вращения, переводящего A в B, и вращения, переводящего B в C. Другими словами,

$$\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}.$$

В частности,

$$\widehat{AB} + \widehat{BA} = \widehat{AA} = 0, \quad \text{откуда} \quad \widehat{AB} = -\widehat{BA},$$

и, более общо, для любой конечной последовательности $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ лучей с общим началом 0

$$\widehat{D_1 D_n} = \widehat{D_1 D_2} + \widehat{D_2 D_3} + \ldots + \widehat{D_{n-1} D_n}.$$

Это равенство носит название **формулы** Шаля; оно, очевидно, распространяется (с помощью переноса) на случай лучей с произвольными началами.

59. Сумма углов замкнутого плоского многоугольника

Пусть P — замкнутый плоский многоугольник с n вершинами, т. е. последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ точек плоскости Π, определенная с точностью до циклической перестановки.

Будем здесь предполагать, что для всех i имеет место неравенство $a_i \neq a_{i+1}$ (следовательно, также $a_n \neq a_1$); положим, далее, $\delta_i =$ луч $D(a_i, a_{i+1})$.

Внешним углом многоугольника P в вершине a_i называется угол $\widehat{\delta_{i-1}\delta_i}$; **углом** многоугольника P в вершине a_i называется угол $\widehat{a_{i-1}a_ia_{i+1}}$.

Предложение 59.1. *Сумма внешних углов всякого замкнутого плоского многоугольника равна* 0.

Доказательство. Действительно, в силу равенства Шаля

$$\widehat{\delta_1\delta_2} + \widehat{\delta_2\delta_3} + \ \ldots \ + \widehat{\delta_n\delta_1} = \widehat{\delta_1\delta_1} = 0.$$

Следствие 59.2. *Сумма углов всякого замкнутого плоского многоугольника равна* 0 *или* ϖ *в зависимости от четности или нечетности числа* n *его вершин.*

Действительно, пусть δ'_{i-1} — луч $D(a_i, a_{i-1})$; тогда $\widehat{\delta_{i-1}\delta'_{i-1}} = \varpi$. Следовательно,

$$\widehat{a_{i-1}a_ia_{i+1}} = \widehat{\delta'_{i-1}\delta_{i-1}} + \widehat{\delta_{i-1}\delta_i} = \varpi + \widehat{\delta_{i-1}\delta_i}.$$

Сумма этих углов равна, таким образом, $n\varpi + 0$, т. е. 0 или ϖ в зависимости от того, четно или нечетно n (поскольку $\varpi + \varpi = 0$).

В частности, сумма углов тройки (a_1, a_2, a_3) равна ϖ; когда будет введено понятие ориентации, мы сможем уточнить этот результат, показав, что все три угла такой тройки имеют одинаковую ориентацию.

§ 2. УГЛЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

60. Угол, симметричный данному углу

Лемма 60.1. *Пусть σ — некоторая осевая симметрия, ось которой проходит через* 0. *Для любой пары* (A, B) *лучей с началом* 0 *имеет место равенство*

$$\widehat{A'B'} = -\widehat{AB}, \text{ где } A' = \sigma(A) \text{ и } B' = \sigma(B).$$

Доказательство. Пусть D — любой из двух лучей с общим началом 0, лежащих на оси симметрии σ, и пусть τ — осевая симметрия, меняющая местами прямые D и A'. Вращение $\tau \circ \sigma$ преобразует D в A' и A в D, так что

$$\widehat{DA'} = \widehat{AD}.$$

Аналогично

$$\widehat{DB'} = \widehat{BD},$$

откуда получаем

$$\widehat{A'B'} = \widehat{A'D} + \widehat{DB'} = \widehat{DA} + \widehat{BD} = \widehat{BA} \text{ или } -\widehat{AB}.$$

61. Образ угла при преобразовании подобия

Предложение 61.1. *Для любой пары* (A, B) *лучей плоскости* Π *и для любого преобразования подобия* f *плоскости* Π *выполняются равенства*

$$\widehat{f(A)f(B)} = \widehat{AB}, \text{ если } f \text{ — собственное преобразование подобия;}$$

$$\widehat{f(A)f(B)} = -\widehat{AB}, \text{ если } f \text{ — зеркальное преобразование подобия.}$$

Доказательство. Известно, что всякое преобразование подобия f есть произведение гомотетии с положительным коэффициентом и оставляющего неподвижным начало 0 движения, собственного или зеркального в зависимости от того, является ли преобразование f собственным или зеркальным. Так как гомотетия с положительным коэффициентом сохраняет направление лучей, а следовательно, и углы, нам остается рассмотреть случай, когда f — движение с неподвижной точкой 0.

С другой стороны, поскольку образами параллельных прямых при преобразовании f будут параллельные прямые, то будем предполагать, что прямые A, B имеют общее начало 0.

Если f — зеркальное преобразование, то это — осевая симметрия, и из леммы 60.1 следует, что имеет место равенство

$$\widehat{f(A)f(B)} = -\widehat{AB}.$$

Если же f — собственное преобразование, то оно есть произведение двух осевых симметрий, и искомое соотношение следует из равенства

$$-(-\widehat{AB}) = \widehat{AB}.$$

62. Характеристика вращений

Предложение 62.1. *Пусть θ — некоторый угол, $a \in \Pi$ и f — некоторое отображение плоскости Π в себя. Отображение f тогда и только тогда есть вращение на угол θ с центром a, когда $f(a) = a$ и для всех $x \neq a$*

$$d(a, x) = d(a, f(x)) \quad \text{и} \quad \widehat{xaf(x)} = \theta.$$

Доказательство. Действительно, вращение на угол θ с центром a обладает этими свойствами. С другой стороны, для всех $x \neq a$ соотношения

$$d(a, x) = d(a, y) \quad \text{и} \quad \widehat{xay} = \theta$$

определяют точку y единственным образом; следовательно, всякое отображение, обладающее указанными в предложении свойствами, есть вращение на угол θ с центром a.

Предложение 62.2. *Пусть $a \in \Pi$, и пусть f — некоторое отображение плоскости Π в себя.*

Отображение f тогда и только тогда является вращением с центром a, когда выполняются следующие три условия:

1. $f(a) = a$;
2. *Для всех* $x \neq a$ *имеем* $d(a, x) = d(a, f(x))$;
3. *Для всех* x, $y \neq a$ *имеем* $\widehat{xay} = \widehat{f(x)af(y)}$.

Доказательство. В соответствии с предложением 61.1 всякое вращение с центром a обладает свойством 3; свойства 1 и 2 очевидны.

Обратно: если f обладает свойством 3, то из равенства Шаля следует, что для всех $x, y \neq a$

$$\widehat{xaf(x)} = \widehat{xay} + \widehat{yaf(y)} + \widehat{f(y)af(x)} = \widehat{yaf(y)}.$$

Поэтому $\widehat{xaf(x)} = \theta = \text{const}$, что приводит нас к предложению **62.1**.

63. Характеристика преобразований подобия

Предложение 63.1. *Пусть X — часть плоскости Π, не принадлежащая целиком одной прямой, и f — инъективное отображение X в Π.*

Если для любых различных точек $x, y, z \in \Pi$ выполняется условие

$$\widehat{f(x)f(y)f(z)} = \widehat{xyz} \quad (\textit{соответственно} - \widehat{xyz}),$$

то f есть ограничение на X преобразования подобия плоскости Π, определяемого единственным образом; кроме того, f — собственное (соответственно зеркальное) преобразование подобия.

Доказательство. Начнем с того, что умножим в случае необходимости преобразование f на некоторую осевую симметрию; предложение сведется к случаю отображения f, сохраняющего углы.

Выберем затем две различные точки $a, b \in X$; пусть g — собственное преобразование подобия, переводящее (a, b) в $(f(a), f(b))$.

Отображение $h = g^{-1} \circ f$ множества X в П оставляет неподвижными точки a и b и сохраняет углы; следовательно, для всех $x \in X$, таких, что $x \notin \Delta(a, b)$, прямые $\Delta(a, x)$, $\Delta(b, x)$ пересекаются и параллельны соответственно прямым $\Delta(a, h(x))$, $\Delta(b, h(x))$, откуда следует, что $h(x) = x$.

Таким образом, преобразование h тождественно вне прямой $\Delta(a, b)$. Однако по предположению в X найдется еще по крайней мере одна точка $c \notin \Delta(a, b)$; аналогичное рассуждение показывает, что h — тождественное преобразование вне прямой $\Delta(a, c)$; следовательно, h тождественно на X, и так как X содержит три точки, не принадлежащие одной прямой, то единственным преобразованием подобия плоскости П, которое является продолжением преобразования h, будет тождественное преобразование. Другими словами, f есть ограничение отображения g на множество X и это отображение g единственно.

Заметим, что это доказательство является точной копией доказательства предложения 27.2; как и там, условие взаимной однозначности отображения f можно снять, но это несколько усложнит изложение. Напротив, требование, чтобы множество X не принадлежало целиком одной прямой, является существенным.

Замечание 63.2. Предложение 63.1 справедливо, в частности, в случае, когда множество X образовано тремя неколлинеарными точками a, b, c. В этом случае оно превращается в точную форму «признака подобия» треугольников; в предложении 61.1 содержится второй признак. Из них тотчас же получаются точно сформулированные два случая равенства треугольников.

Тем не менее мы хотим подчеркнуть, что нигде в нашем курсе мы не столкнулись с необходимостью этих признаков подобия и равенства; фактически можно, по-видимому, считать установленным, что, кроме как в задачах, придуманных специально для употребления этих признаков, их использование несущественно и что обычно их выгодно заменять простыми аналитическими или векторными методами.

64. Бисекция угла

Предложение 64.1. *Для любого угла* α *уравнение* $2x = \alpha$ *имеет в точности два решения; их разность равна* ϖ.

Точнее: если A и B — два произвольных луча с общим началом 0, то лучами с началом 0, удовлетворяющими условию

$$2\widehat{AD} = \widehat{AB} \quad (\text{или } \widehat{AD} = \widehat{DB}),$$

будут лучи, принадлежащие оси симметрии σ, *меняющей местами прямые A и B.*

Доказательство. Пусть A, B — два луча с общим началом 0, такие, что $\widehat{AB} = \alpha$. Равенство $2\widehat{AD} = \widehat{AB}$ может быть записано также в виде

$$2\widehat{AD} = \widehat{AD} + \widehat{DB} \quad \text{или} \quad \widehat{AD} = \widehat{DB}.$$

Таким образом, оно выполнено, если D есть один из лучей D_1, D_2, принадлежащих оси симметрии σ (лемма 60.1).

В обратную сторону: положим $\widehat{AD} = \widehat{DB}$; пусть B' — прямая, симметричная A относительно прямой, содержащей D; из леммы 60.1 следует, что $\widehat{AD} = \widehat{DB'}$, откуда $\widehat{DB'} = \widehat{DB}$; следовательно, $B = B'$.

Другими словами, прямая, содержащая D, есть ось симметрии σ; следовательно, $D = D_1$ или $D = D_2$.

Следствие 64.2. 1. *Решением уравнения* $2x = 0$ *могут быть только либо* 0, *либо* ϖ.

2. *Уравнение* $2x = \varpi$ *имеет два решения* (*которые называются прямыми углами*); *кроме того,*

$$(A \perp B) \Leftrightarrow (\widehat{AB} \text{ есть прямой угол}).$$

Замечание. На этой стадии нашего курса мы не можем еще исследовать в $\mathscr{A}$ уравнения вида $nx = 0$

или $nx = \alpha$ ($n \in Z$). Напротив, это исследование станет чрезвычайно простым, когда в нашем распоряжении окажется мера углов. Впрочем, мера не есть нечто абсолютно необходимое для элементарной геометрии.

65. Углы между двумя прямыми

Определение 65.1. Пусть (A, B) — пара прямых, проходящих через 0. *Углом* этой *пары* называют всякое вращение вокруг точки 0, переводящее A в B.

Непосредственно из определения следует, что существует два таких угла; это углы, образованные одним из лучей прямой A с каждым из лучей прямой B; разность между ними равна ϖ.

Воспользовавшись параллельностью, можно отсюда вывести определение угла между произвольными прямыми или угла между направлениями.

Следующее обобщение поможет лучше усвоить понятие угла между прямыми. Пусть A — объединение лучей с общим началом 0, инвариантное относительно подгруппы $\mathscr{G}$ группы $\mathscr{R}_0$; пусть, далее, $\rho \in \mathscr{R}_0$ и $B = \rho(A)$.

Вращения ρ', для которых $B = \rho'(A)$, принадлежат множеству $\rho \circ \mathscr{G}$, что влечет неоднозначность угла между прямыми пары (A, B). Если же мы хотим непременно сопоставить каждой паре (A, B) однозначно определенный «псевдоугол», то таким можно считать элемент факторгруппы $\mathscr{R}_0/\mathscr{G}$. В случае, когда A — прямая, множеством $\mathscr{G}$ будет подгруппа $\{0, \varpi\}$ группы $\mathscr{R}_0$ (которую можно отождествить с $\mathscr{A}$).

Заметим, что если α_1 и α_2 — два угла пары (A, B), то равенство $\alpha_2 = \alpha_1 + \varpi$ влечет равенство $2\alpha_2 = 2\alpha_1$; так как, с другой стороны, равенство $2x = 2\alpha$ влечет $x = \alpha_1$ или $x = \alpha_1 + \varpi = \alpha_2$, то легко видеть, что очень удобно связывать с парой (A, B) не углы $\alpha_1 \alpha_2$, а удвоенный угол $2\alpha_1 = 2\alpha_2$. Последнее замечание позволяет избавиться от многих трудностей, встречающихся при рассмотрении углов между прямыми. Приведем пример, иллюстрирующий это.

Пусть A и B — две прямые, проходящие через 0, и пусть α — один из углов пары (A, B).

Произведение осевых симметрий, из которых первая имеет ось A, а вторая — ось B, есть вращение вокруг точки 0; определим угол этого вращения f. Пусть A_1 — один из лучей с началом в точке 0, принадлежащих прямой A; пусть B_1 — луч прямой B, такой, что $\widehat{A_1B_1} = \alpha$. Тогда луч $f(A_1)$ симметричен лучу A_1 относительно B, откуда по лемме 60.1

$$\widehat{A_1 f(A_1)} = \widehat{A_1B_1} + \widehat{B_1 f(A_1)} = \widehat{A_1B_1} - \widehat{B_1A_1} = 2\alpha.$$

Угол вращения f равен, таким образом, 2α.

ГЛАВА VI

ОРИЕНТАЦИЯ

66. Трудности, связанные с понятием ориентации

Понятие ориентации наряду с понятием угла считается наиболее трудным для преподавания. За неимением настоящего математического определения это понятие обычно задают либо с помощью маленького человечка с хорошей памятью, насаженного на конец стрелки, либо пользуясь правилом штопора, либо с помощью трех растопыренных пальцев левой или — в зависимости от страны — правой руки.

Однако, в то время как учение об углах по-настоящему трудно, определение понятия ориентации возникает в геометрии совершенно естественным путем из свойств группы движений.

Одно из препятствий на пути к глубокому усвоению понятия ориентации связано с тем, на каком материале оно строится. Обычно — это множество пар (A, B) лучей с общим началом, не принадлежащих одной прямой. Но с такой парой связана также и пара (B, A), полученная перестановкой лучей; ориентация этих пар противоположна. Таким образом, такой исходный материал порождает смешение понятий упорядоченной пары (или, в более общем случае, упорядоченного множества) и ориентации; несомненно существует определенная связь между этими двумя понятиями, но не следует подчеркивать этого до тех пор, пока понятие ориентации не будет как следует усвоено на определенном материале без обращения к отношению порядка.

67. Ориентация частей плоскости П

Переходим к изучению некоторых примеров.

1°. В плоскости П существуют такие множества из трех точек, что расстояния между этими тремя точками равны 2, 3, 4; каждое такое множество не принадлежит одной прямой, поскольку $4<2+3$ (следствие 39.4 и предложение 39.5).

Пусть E — множество таких подмножеств плоскости П.

Это множество устойчиво относительно группы $\mathcal{J}$ движений плоскости П; с другой стороны, $\mathcal{J}$ действует на E однотранзитивным образом. Действительно, для любых X_1, $X_2 \in E$, очевидно, найдется — и притом единственное — отображение f множества X_1 на X_2, которое является движением и может быть продолжено единственным образом до движения всей плоскости П, отображающего ее на себя, поскольку X_1 не принадлежит целиком одной прямой (теорема 45.6).

Говорят, что **ориентация** множеств X_1, X_2 **совпадает**, если движение f плоскости П, для которого $X_2=f(X_1)$, есть собственное движение; в противном случае говорят, что X_1 и X_2 имеют **противоположную ориентацию**. Из того факта, что $\mathcal{J}^+$ образует группу, немедленно следует, что ориентация есть отношение эквивалентности на E.

Если X_1, X_2 противоположно ориентированы и X_2, X_3 также противоположно ориентированы, то X_1 и X_3 ориентированы одинаково, поскольку произведение двух зеркальных движений есть собственное движение.

Следовательно, данное отношение эквивалентности на E имеет в точности два класса эквивалентности, а именно, два множества образов произвольного элемента X_0 множества E при преобразованиях из $\mathcal{J}^+$ и $\mathcal{J}^-$ соответственно.

Выясним теперь, что называют *положительной* и *отрицательной ориентацией*: выберем совершенно произвольным образом элемент $X_0 \in E$, который будет называться *основным репером*, и условимся говорить, что элемент X множества E имеет *положительную* (соответственно *отрицательную*) *ориентацию*, если ориентации X_0 и X совпадают (соответственно противоположны). Таким образом, чтобы быть совершенно точным, следует сказать: ориентация множества X положительна при данном выборе основного репера X_0; мы можем опускать эту ссылку на основной репер лишь до тех пор, пока не забываем о существовании этого строго фиксированного репера.

Знак ориентации, очевидно, не меняется в результате замены основного репера другим репером той же ориентации.

Еще несколько аналогичных примеров

2°. В общем случае пусть A — некоторое подмножество плоскости П, не принадлежащее одной прямой, такое, что единственным движением этого множества, отображающим его на себя, является тождественное преобразование; далее, пусть E — множество подмножеств (частей) плоскости П, имеющих вид $f(A)$, где $f \in \mathcal{I}$.

Очевидно, что E устойчиво относительно $\mathcal{I}$ и что $\mathcal{I}$ действует однотранзитивным образом на E, так что относительно E можно повторить все сказанное в предыдущем примере. Например, можно принять за A поляризованную полуплоскость или флаг — объединение точки a, открытого луча D с началом a и одной из открытых полуплоскостей, определяемых прямой, несущей D.

3°. Обобщим эту процедуру: пусть A — подмножество плоскости П, не принадлежащее одной прямой и такое, что всякое движение, отображающее это множество на себя, есть собственное движение (в том смысле, что продолжение этого движения на плоскость П является собственным движением). Определим тогда множество E описанным выше образом. Множество E устойчиво относительно $\mathcal{I}$; для любых X_1, $X_2 \in E$ найдется по крайней мере одно движение $f \in \mathcal{I}$, переводящее X_1 в X_2; по предположению все такие движения являются одновременно собственными или зеркальными.

Следовательно, можно очевидным образом определить совпадение ориентаций двух элементов множества E. Остальные рассуждения аналогичны предыдущим.

Например, за множество A можно принять объединение двух противоположных сторон квадрата и одной из его диагоналей (буква Z) или объединение отрезков, получающихся из некоторого отрезка $[a, b]$ при переносах t^n $(n \in Z)$, где t — перенос, направление которого не параллельно и не перпендикулярно отрезку $[a, b]$.

68. Ориентация прочих геометрических объектов связанных с плоскостью П

Нам известны некоторые геометрические объекты, связанные с плоскостью П, но не являющиеся ее частями: пара точек, тройка точек, пара лучей, ориентированная прямая, преобразование, угол и т. д.; определим понятие ориентации для некоторых из этих объектов.

1°. а. Пусть E — множество пар (A, B) принадлежащих плоскости П перпендикулярных лучей с общим началом. Это множество устойчиво относительно группы $\mathcal{I}$, и эта группа действует на E однотранзитивным образом; следовательно, для множества E справедливо все сказанное в предыдущих примерах; условие, при котором пары (A, B) и (A', B') имеют одинаковую ориентацию, записывается здесь так:

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}.$$

Но помимо этого здесь возникает нечто новое, а именно существование инволютивного преобразования $(A, B) \to (B, A)$ множества E, которое ставит в соответствие всякому элементу (A, B) из E противоположный элемент (B, A).

Известно, что движение, переводящее (A, B) в (B, A), есть осевая симметрия; следовательно, противоположные пары (A, B) и (B, A) имеют противоположную ориентацию.

b. В общем случае можно принять за E множество пар (A, B) лучей с общим началом и таких, что $\widehat{AB} = \theta$ или $\widehat{AB} = -\theta$ (где θ — заданный угол, отличный от 0 и ϖ).

c. Приведем менее классический пример: E есть множество пар (D, x), где D — ориентированная прямая плоскости Π, а x — точка плоскости Π, удаленная от прямой D на расстояние 1.

d. Множество E образовано тройками (x, y, z), изометричными данной тройке (a, b, c) точек, не принадлежащих одной прямой. В частности, если $\|b - a\| = \|c - a\| = 1$ и $\Delta(a, b) \perp \Delta(a, c)$, то векторы b, c центрированной плоскости (Π, a) образуют ортонормированный базис этой системы, так что в этом случае можно, следовательно, рассматривать E как множество ортонормированных реперов плоскости Π. Понятию положительного репера здесь возвращается его классический смысл.

2°. С помощью приведенных ниже двух примеров мы убедимся, что понятие ориентации не связано с понятием движения; кроме того, эти примеры позволят нам сравнить ориентации двух произвольных троек неколлинеарных точек и двух пар лучей, не принадлежащих одной прямой.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ группу аффинных преобразований плоскости Π, через $\mathfrak{A}_+$ — ее подгруппу, образованную преобразованиями с положительным определителем (это понятие мы полагаем известным).

a. Пусть E — множество троек (x, y, z) неколлинеарных точек плоскости Π; это множество устойчиво относительно группы $\mathfrak{A}$ преобразований, и эта группа действует на E однотранзитивно. Говорят, что (x, y, z) и (x', y', z') *одинаково ориентированы*, если элемент f группы $\mathfrak{A}$, переводящий (x, y, z) в (x', y', z'), принадлежит $\mathfrak{A}_+$.

Тот факт, что для всех $f, g \in \mathfrak{A}$ определитель преобразования $f \circ g$ равен произведению определителей преобразований f и g, позволяет проводить исследование таким же образом, как это было сделано для группы движений.

10 Зак. 323

Заметим, что если аффинное преобразование f есть движение, то его определитель положителен или отрицателен в зависимости от того, является ли f собственным или зеркальным движением; таким образом, ориентация, которую мы только что определили, совместима с определенной в примере 1°, d.

Как и в примере 1°, a, здесь появляется нечто новое: с каждой тройкой (x, y, z) множества E ассоциируются шесть троек, получающиеся из нее всевозможными подстановками. Сравнить их ориентации позволяет следующая

Лемма 68.1. *Ориентация всякой тройки, получающейся из (x, y, z) транспозицией (перестановкой двух элементов), противоположна ориентации тройки (x, y, z).*

Доказательство. Действительно, элемент f группы $\mathfrak{A}$, переводящий (x, y, z), например, в (x, z, y), есть косая симметрия параллельно прямой $\Delta(y, z)$, ось которой проходит через x и через середину пары (y, z); определитель преобразования f равен (-1).

Отсюда следует, что среди шести троек, ассоциированных с (x, y, z), тройки (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y) ориентированы одинаково; остальные тройки имеют противоположную ориентацию.

b. Пусть E — множество пар (A, B) лучей плоскости Π, не принадлежащих одной прямой и имеющих общее начало; это множество устойчиво относительно группы $\mathfrak{A}$, и эта группа действует на E транзитивно (но не однотранзитивно).

Кроме того, все преобразования $f \in \mathfrak{A}$, переводящие (A, B) в (A, B), в системе осей, связанной с этой парой, имеют вид

$$(\xi, \eta) \to (u\xi, v\eta), \quad \text{где} \quad u, v > 0.$$

Следовательно, определитель преобразования f положителен.

Таким образом, для всех (A, B), $(A', B') \in E$ определители всех преобразований f, переводящих (A, B) в (A', B'), имеют одинаковый знак. Поэтому далее теория может строиться так же, как в предыдущих примерах.

Наконец, легко видеть, что две противоположные пары имеют противоположную ориентацию.

Заключение. Из всех предыдущих примеров становится ясным, что некоторую теорию ориентации можно связать со всякой тройкой $(E, \mathcal{G}, \mathcal{G}^+)$, где E — произвольное множество, $\mathcal{G}$ — группа преобразований множества E, транзитивная на нем, и $\mathcal{G}^+$ — нормальный делитель группы $\mathcal{G}$, такой, что $\mathcal{G}/\mathcal{G}^+$ есть группа порядка 2 и при любом $x \in E$ подгруппа элементов группы $\mathcal{G}$, оставляющих неподвижной точку x, содержится в $\mathcal{G}^+$ (ясно, что если это условие выполнено для некоторого x, то оно выполнено и для всех $x \in E$).

69. Элементарное исследование ориентации пар лучей, не принадлежащих одной прямой

Исходя из методологических и методических соображений, мы попытаемся исключить обращение к аффинной группе $\mathfrak{A}$ при определении ориентации пар лучей, не принадлежащих одной прямой.

Пусть E — множество пар (A, B) лучей плоскости Π, не принадлежащих одной прямой и имеющих общее начало.

Для любых $(A, B), (A', B') \in E$ будем говорить, что (A, B) и (A', B') имеют одинаковую ориентацию, если в случае собственного движения f, переводящего A в A', лучи B' и $f(B)$ оказываются по одну сторону от прямой, несущей A' (иначе говоря, в одной полуплоскости, ограниченной этой прямой; см. рис. 11).

Так как всякое движение преобразует полуплоскость в полуплоскость и собственные движения образуют группу, то это отношение есть отношение эквивалентности на E; легко видеть, что оно имеет в точности два класса эквивалентности (достаточно рассмотреть множество пар (A, X), где A — данный луч). Следовательно, в дальнейшем можно говорить об основном репере и о положительной или отрицательной ориентации, как и в предыдущих примерах.

Легко видеть, что всякое растяжение с положительным коэффициентом и всякое собственное движение, а следовательно, и всякое собственное преобразование подобия сохраняют определенную таким образом ориентацию.

Для всякой пары (A, B) симметрия σ относительно прямой, содержащей луч A, переводит, очевидно,

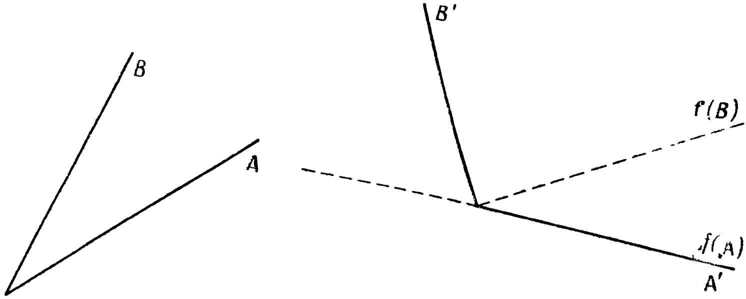

Рис. 11.

(A, B) в противоположно ориентированную пару. Но для любого зеркального преобразования подобия f преобразование подобия $f \circ \sigma = g$ является собственным и, следовательно, сохраняет ориентацию; иначе говоря, $f((A, B))$ и (A, B) имеют противоположную ориентацию.

Ориентация углов

Пусть θ, θ' — два произвольных угла, отличных от 0 и ϖ. Говорят, что θ и θ' имеют *одинаковую ориентацию*, если найдутся две пары (A, B), (A', B') лучей с общим началом, для которых

$$\widehat{AB} = \theta; \quad \widehat{A'B'} = \theta'; \quad (A, B) \text{ и } (A', B') \text{ имеют одинаковую ориентацию.}$$

Легко видеть, что это есть отношение эквивалентности на множестве углов, отличных от 0 и ϖ, и что это отношение имеет в точности два класса эквивалентности.

Предложение 69.1. *Для любой тройки* (x, y, z) *неколлинеарных точек три угла* $\widehat{xyz}$, $\widehat{yzx}$, $\widehat{zxy}$ *имеют одинаковую ориентацию.*

Доказательство. Покажем это для первых двух углов.

Пусть x' — некоторая точка медиатрисы пары (y, z), расположенная по ту же сторону от $\Delta(y, z)$, что и точка x.

Углы $\widehat{xyz}$ и $\widehat{x'yz}$ ориентированы одинаково; то же самое можно сказать про углы $\widehat{yzx}$ и $\widehat{yzx'}$.

Однако $\widehat{x'yz} = -\widehat{x'zy}$ (симметричность); следовательно, $\widehat{x'yz} = \widehat{yzx'}$, откуда и вытекает требуемое свойство.

Замечание. Для этого элементарного исследования ориентации пар лучей, не принадлежащих одной прямой, мы использовали метрическую структуру плоскости. По-видимому, это едва ли можно считать удовлетворительным, поскольку аффинной структуры здесь было бы достаточно; но в свою очередь и аффинная структура отнюдь не обязательна; можно построить теорию ориентации, исходя только из аксиом I, II. Мы предложим проделать это исследование в качестве упражнения.

70. Связь между понятиями ориентации и непрерывного преобразования

Мы провели исследование понятия ориентации алгебраическими методами, потому что на элементарном уровне невозможно правильно использовать понятие непрерывности; истинная же причина, побудившая нас выбрать именно такие определения и обеспечившая их успех, носит топологический характер. Например, можно показать, что на плоскости П две тройки точек (x, y, z) и (x', y', z') имеют одинаковую ориентацию только в том случае, когда существует непрерывное семейство троек (неколлинеарных) точек, которое связывает первую тройку со второй, или точнее если в множестве таких троек, на котором задана естественная топология, найдется дуга, концами которой являются два данных элемента. Аналогичный результат имеет место для случая ориентации пар лучей, не принадлежащих одной прямой.

Фактически, поскольку ориентация всегда определяется исходя из задания подгруппы некоторой группы преобразований, нам достаточно изучить вопросы, связанные с этой подгруппой.

Группы $\mathcal{G}$ преобразований, изучаемые в геометрии, действуют на топологических пространствах — обычно многообразиях конечной размерности, — и сами эти группы снабжены некоторой топологией, согласованной с их групповой структурой (непрерывность умножения и симметрии). Например, для группы линейных преобразований евклидова пространства размерности n топология в группе легко может быть задана с помощью (числовых!) коэффициентов определяющей преобразование матрицы (a_{ij}): естественно отождествить матрицу (a_{ij}) с точкой пространства R^N (где $N = n^2$), имеющей координаты a_{ij}, и принять топологию, индуцированную топологией пространства R^N.

В такой топологической группе $\mathcal{G}$ можно рассматривать дуги и компоненты связности; через $\mathcal{G}^+$ обозначается компонента связности, содержащая нейтральный элемент e группы $\mathcal{G}$, т. е. в обычном случае множество элементов x группы $\mathcal{G}$, для которых существует дуга с концами e, x. Можно доказать, что $\mathcal{G}^+$ есть нормальный делитель группы $\mathcal{G}$; факторгруппу $\mathcal{G}/\mathcal{G}^+$ называют *группой ориентаций* группы $\mathcal{G}$.

Обычно эта факторгруппа имеет порядок 2; мы ограничились рассмотрением только этого случая, но может оказаться, что дело обстоит и не так.

Например, если $\mathcal{G}$ — группа дифференцируемых преобразований объединения двух непересекающихся окружностей, то $\mathcal{G}/\mathcal{G}^+$ имеет порядок 8. Может случиться также, что $\mathcal{G}$ — связное множество; тогда $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+$ и $\mathcal{G}/\mathcal{G}^+$ содержит единственный элемент; это имеет место в случае проективных преобразований проективной плоскости.

Перейдем теперь к исследованию частного случая группы движений; одновременно мы попытаемся разобраться в смешении понятий (физического) процесса движения и движения как преобразования.

71. Процесс движения

Ребенок, пытающийся вникнуть в понятие движения, сталкивается с определенной трудностью, так как физический мир дает мало моделей (геометрического) движения в чистом виде[1]; чаще всего мы сталкиваемся с (физическим) *процессом движения*, т. е. непрерывным семейством (геометрических) движений. Эта трудность усугубляется тем, что плоскость или кусок плоскости не имеет дискретной структуры

[1]) Существуют, однако, элементарные примеры такого рода, скажем отражение в зеркале или соответствие между двумя оттисками одной и той же гравюры.

и поэтому физически трудно определить образ какой-нибудь точки материальной модели при некотором геометрическом движении.

Этот второй вопрос можно несколько упростить, если вначале рассматривать лишь преобразования конечных подмножеств плоскости, определяя затем местонахождение точек плоскости — «молекул» материальной модели — с помощью системы координат. От первой трудности можно избавиться полностью, только если наряду с понятием движения будет точно определено понятие процесса движения.

Определение 71.1. Пусть $\mathcal{J}$ — множество движений плоскости Π. *Процессом движения* называется всякое отображение $t \to f_t$ отрезка $[u, v]$ пространства R в $\mathcal{J}$, которое непрерывно в следующем смысле: для любой точки $a \in \Pi$ отображение $t \to f_t(a)$ отрезка $[u, v]$ в Π непрерывно.

Легко видеть, что если существуют три неколлинеарные точки a_1, a_2, a_3 плоскости Π, такие, что каждое из отображений $t \to f_t(a_i)$ непрерывно, то отображение $t \to f_t$ непрерывно.

Действительно, каждое $a \in \Pi$ может быть представлено единственным образом в плоскости $(\Pi, 0)$ в виде

$$a = \sum \alpha_i a_i \quad (\text{где } \sum \alpha_i = 1,\ i = 1,\ 2,\ 3).$$

Но каждое f_t есть аффинное преобразование; следовательно,

$$f_t(a) = \sum \alpha_i f_t(a_i);$$

функция f_t есть сумма трех непрерывных функций и, следовательно, также непрерывна.

В следующем предложении устанавливается связь между понятиями процесса движения и ориентации; оно объясняет тот факт, что псевдоопределения ориентации, основанные на скольжении одной плоскости по другой, не приводят к ошибкам.

Предложение 71.2. *В любом процессе движения $t \to f_t$ либо все движения f_t являются собственными, либо все они — зеркальные движения.*

Доказательство. Формулировка и доказательство останутся теми же и для случая произвольных аффинных преобразований: определитель аффинного преобразования f_t есть непрерывная функция от t (поскольку коэффициенты матрицы преобразования f_t непрерывны по предположению); но он никогда не обращается в нуль и имеет, следовательно, постоянный знак, откуда и следует искомое свойство.

Следствие. *Если f_u — тождественное преобразование, то все движения f_t суть собственные движения.*

Частный случай: *процесс вращения.* Немного ниже в связи с мерой углов мы займемся изучением непрерывных представлений аддитивной группы R в аддитивной группе углов. Пусть $t \to \alpha(t)$ — такое представление; обозначим через f_t вращение на угол $\alpha(t)$ вокруг некоторой точки 0. Процессом вращения вокруг точки 0 называется всякий процесс движения вида $t \to f_t$ (где $t \in [0, v]$).

Траекторию точки плоскости Π при таком движении мы будем называть дугой окружности.

Заметим, что с таким процессом движения связано вполне определенное вращение, а именно вращение f_v, но обратное, очевидно, неверно.

Упражнения к главе VI

Предлагается доказать, пользуясь только аксиомами I и II и полагая, кроме того, что мощность α прямых плоскости Π превосходит 2 (тогда, как это следует из упр. 4 к гл. I, кардинальное число α бесконечно), некоторые свойства, которые были нами ранее доказаны с использованием аффинной структуры плоскости Π.

Понятие ориентированного направления

1. Пусть A, B — две параллельные прямые; выберем для каждой из этих прямых одну из ее возможных ориентаций.

Говорят, что эти ориентированные прямые имеют *одинаковую ориентацию*, если существует такое направление δ, не параллельное прямым A и B, что проекция прямой A на прямую B параллельно направлению δ (как известно, эта проекция монотонна по следствию 6.3) будет монотонно возрастающей. Показать, что для любого другого направления δ', не параллельного прямым A и B, проекция также будет монотонно возрастающей (можно использовать для этого упр. 7 к гл. I).

2. Вывести отсюда, что определенное таким образом отношение есть отношение эквивалентности на множестве ориентированных прямых, несущие прямые которых имеют заданное направление; показать, что это множество разбивается на два класса эквивалентности и что две ориентированные прямые, порождаемые одной и той же прямой, принадлежат различным классам.

Ориентация пар лучей с общим началом, не принадлежащих одной прямой

3. Будем называть *ориентированной полуплоскостью* всякую пару (A, P), где A — ориентированная прямая и P — одна из замкнутых полуплоскостей, определяемых этой прямой.

Говорят, что две ориентированные полуплоскости (A, P), (A', P') имеют *одинаковую ориентацию*, если:

либо A и A' пересекаются и один из лучей $(A \cap P')$, $(A' \cap P)$ ориентирован одинаково с содержащей его прямой A или A', а другой противоположно;

либо A и A' параллельны и одинаково направлены и одна из полуплоскостей P, P' содержит другую;

либо A и A' параллельны и противоположно направлены и ни одна из полуплоскостей P, P' не содержит другую.

Показать, что это отношение есть отношение эквивалентности на множестве ориентированных полуплоскостей и что существует в точности два класса эквивалентности по этому отношению; показать также, что ориентированные полуплоскости, определяемые одной и той же прямой, имеют различные ориентации.

Укажем, наконец, еще один, более элегантный способ сравнения ориентаций двух ориентированных полуплоскостей.

Пусть (A, P) и (A', P') — две ориентированные полуплоскости; каждой прямой D, пересекающей A и A', поставим в соответствие число $\alpha_{A, A'}(D)$, равное 1 или -1 в зависимости от того, возрастает или убывает косая проекция прямой A на A' параллельно D, и число $\beta_{P, P'}(D)$, равное 1 или -1 в зависимости от того, имеют лучи $D \cap P$ и $D \cap P'$ одинаковую ориентацию на прямой D или нет. Можно доказать, что произведение этих двух чисел не зависит от D; это произведение равно 1 или -1; если оно равно 1, то говорят, что (A, P) и (A', P') имеют *одинаковую ориентацию*. Из очевидных соотношений

$$\alpha_{A, A'} = \alpha_{A', A}; \quad \alpha_{A, A} = 1; \quad \alpha_{A, A''} = \alpha_{A, A'} \cdot \alpha_{A', A''}$$

и аналогичных соотношений для β немедленно получаем, что только что определенное отношение есть отношение эквивалентности, имеющее в точности два класса эквивалентности.

Далее, можно доказать, что это отношение совпадает с отношением, определенным в начале этого упражнения.

4. Для любой пары (A, B) лучей с общим началом, не принадлежащих одной прямой, обозначим через $f(A, B)$ ориентированную полуплоскость, образованную ориентированной прямой, порождаемой лучом A, и замкнутой полуплоскостью, определяемой этой прямой и содержащей B.

Будем говорить, что две такие пары (A, B), (A', B') имеют *одинаковую ориентацию*, если $f(A, B)$ и $f(A', B')$ имеют одинаковую ориентацию. Показать, что это отношение есть отношение эквивалентности, имеющее в точности два класса эквивалентности, и что две противоположные пары (A, B), (B, A) имеют противоположную ориентацию.

5. Пусть X, Y, Z — три непустые выпуклые плоские множества, такие, что никакая прямая не пересекает все три множества сразу.

Показать, что все пары лучей $(D(x, y),\ D(x, z))$, где $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, имеют одинаковую ориентацию.

ГЛАВА VII

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Элементарная тригонометрия состоит, в сущности, из правильного определения тригонометрических линий угла, соответствующих формул сложения и некоторых соотношений между углами и расстояниями.

72. Косинус и синус угла относительно некоторого базиса

Определение 72.1. Пусть (a, b) — ортонормированный базис центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ и f — вращение вокруг точки 0 на угол α.

Косинусом и *синусом угла* α *относительно базиса* (a, b) называются координаты точки $f(a)$ в базисе (a, b); они обозначаются через $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

Мы перейдем сразу к изучению того, насколько $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ зависят от выбора базиса.

Предложение 72.2. *Величина* $\cos\alpha$ *не зависит от выбора ортонормированного базиса; напротив, значения* $\sin\alpha$ *в двух ортонормированных базисах противоположной ориентации противоположны по знаку.*

Доказательство. 1. В плоскости $(\Pi, 0)$ после замены базиса (a, b) базисом $(a, -b)$ координаты точки $f(a)$ будут равны $\cos\alpha$ и $-\sin\alpha$.

2. Пусть g — произвольное вращение вокруг точки 0.

Из равенства $f(a) = (\cos\alpha)a + (\sin\alpha)b$ получаем $f(g(a)) = g(f(a)) = (\cos\alpha)\,g(a) + (\sin\alpha)\,g(b)$.

Следовательно, косинус и синус угла α относительно базисов (a, b) и $(g(a), g(b))$ равны.

3. Очевидно, косинус и синус угла α относительно базисов, получающихся один из другого переносом, одни и те же (сохраняются углы и координаты).

Из этих трех частных случаев следует справедливость предложения, поскольку переход от базиса (a, b) к любому другому ортонормированному базису осуществляется с помощью (возможно) осевой симметрии с осью $\Delta(0, a)$, вращения вокруг точки 0 и переноса.

Следовательно, во всех тех вопросах планиметрии, для решения которых мы хотим использовать синус, существенно точно указать, какой репер выбирается в качестве ортонормированного базиса. Из соображений удобства и для поддержки интуиции обычно при изображении на классной доске за оси принимают горизонтальный луч $\Delta(0, a)$, направленный вправо, и вертикаль $\Delta(0, b)$, направленную вверх.

Предложение 72.3. *Для всякой упорядоченной пары A, B лучей с общим началом $\cos(\widehat{AB})$ равен коэффициенту проекции $c(A, B)$.*

Доказательство. Пусть 0 — начало лучей A, B, и a — точка, принадлежащая A и определяемая условием $d(0, a) = 1$. Если обозначить через f вращение на угол $\widehat{AB}$ вокруг точки 0, то $f(a)$ окажется точкой луча B, определяемой условием $d(0, f(a)) = 1$.

Если a_1 — ортогональная проекция точки $f(a)$ на прямую, несущую A, то получаем, что $\cos\alpha$ равен скалярной величине k, такой, что $a_1 = ka = c(A, B)a$.

73. Матрица вращения относительно ортонормированного положительного базиса

Пусть (a, b) — ортонормированный базис плоскости $(\Pi, 0)$, имеющий одинаковую ориентацию с базисным реπером, и f — вращение вокруг точки 0 на угол α.

Пусть g — вращение вокруг точки 0, переводящее a в b; известно, что g^2 есть центральная симметрия с центром 0, откуда следует, что

$$g(a) = b; \quad g(b) = g^2(a) = -a.$$

Из равенства

$$f(a) = (\cos\alpha)\, a + (\sin\alpha)\, b \tag{1}$$

получаем, следовательно,

$$f(b) = f(g(a)) = g(f(a)) = (\cos\alpha)\, g(a) + (\sin\alpha)\, g(b),$$

или

$$f(b) = (\cos\alpha)\, b - (\sin\alpha)\, a. \tag{2}$$

Обозначим через ξ, η координаты некоторой точки x в базисе (a, b); из соотношения $x = \xi a + \eta b$ получаем, учитывая (1) и (2),

$$f(x) = \xi f(a) + \eta f(b) = (\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha)\, a + \\ + (\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha)\, b.$$

Матрица преобразования f в базисе (a, b) имеет, следовательно, вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

В качестве легкого упражнения предлагается проверить, что это матрица некоторого движения; определитель этой матрицы равен 1.

Замечания. 1. Пусть (a, b) — ортонормированный базис плоскости $(\Pi, 0)$, ориентация которого отрицательна; в этом базисе косинус и синус угла α равны $\cos\alpha$ и $-\sin\alpha$; следовательно, матрицей преобразования f относительно (a, b) будет матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Производя вращение вокруг точки 0 и затем осевую симметрию с осью $\Delta(0, a)$, можно получить произвольное зеркальное движение, оставляющее точку 0 неподвижной; его матрица имеет, следовательно, вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что ее определитель равен (-1) и что неподвижные точки связанного с ней движения заполняют некоторую прямую.

74. Формулы сложения

Пусть f, g — два вращения вокруг точки 0 на углы α и β соответственно; их произведение $f\circ g = g\circ f$ есть вращение на угол $(\alpha+\beta)$.

Относительно произвольного базиса получаем:

матрица преобразования $(f\circ g) =$
= (матрица преобразования f) $\times$
$\times$ (матрица преобразования g).

В частности, после выбора ортонормированного базиса (положительной или отрицательной ориентации) из этого соотношения *) следуют тождества

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta, \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta. \qquad (4)$$

Эти соотношения могут быть представлены в другом, очень удобном, виде.

Положим для любого угла θ

$$E(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Из соотношений (3) и (4) получаем:

$$E(\alpha+\beta) = E(\alpha)\cdot E(\beta). \qquad (5)$$

*) То есть, например, из соотношения

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

И наоборот, из соотношения (5) следуют (3) и (4); таким образом, оно эквивалентно этим равенствам. Если мы отождествим плоскость комплексного переменного с плоскостью $(\Pi, 0)$, отождествляя $(\xi + i\eta)$ с $(\xi a + \eta b)$, то получим, что $E(\theta)$ есть не что иное, как точка $f(a)$, где f — вращение на угол θ вокруг точки 0; следовательно, E есть взаимно однозначное отображение множества $\mathscr{A}$ углов на множество T комплексных чисел модуля 1. Из соотношения (5) следует, что E, помимо того, есть изоморфизм в алгебраическом смысле этого слова, отображающий группу $\mathscr{A}$ на мультипликативную группу T.

Этот изоморфизм совершенно замечателен, так как с его помощью можно задать на $\mathscr{A}$ топологию, исходя из топологии, индуцированной на T топологией плоскости. Такая топология не зависит от выбора репера (a, b), потому что движение, позволяющее переходить от одного репера к другому, сохраняет расстояния и, следовательно, непрерывно, так же как и обратное ему движение.

Выводы

Элементарная тригонометрия может теперь строиться очень просто.

Из соотношения (5) выводятся формулы умножения углов с помощью равенства

$$E(n\alpha) = (E(\alpha))^n;$$

затем дается определение $\operatorname{tg}\alpha$ и из (3), (4), (5) получаются формулы сложения и умножения углов для этой функции; затем доказывается, что «угол» между двумя прямыми характеризуется его тангенсом.

Соотношение, имеющее место во всяком треугольнике:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos \widehat{A},$$

уже известно (см. предложение 39.2).

Наконец, принимая во внимание тот факт, что синусы двух углов (отличных от 0 и ϖ) одинаковой ориентации имеют одинаковый знак, устанавливаются соотношения

$$\frac{\alpha}{\sin \widehat{A}} = \frac{\beta}{\sin \widehat{B}} = \frac{\gamma}{\sin \widehat{C}}.$$

§ 2. МЕРА УГЛОВ

75. В поисках определения

Выделим сначала существенные особенности мер таких величин, как площади, объемы, массы.

Пусть E — некоторое множество и $\mathscr{E}$ — какое-то множество его подмножеств; будем предполагать, что $\mathscr{E}$ устойчиво относительно объединения конечного числа элементов, т. е. если X_1, $X_2 \in \mathscr{E}$, то и $X_1 \cup X_2 \in \mathscr{E}$.

Мерой на множестве $\mathscr{E}$ называется отображение $X \to m(X)$ множества $\mathscr{E}$ в R_+, такое, что $m(X_1 \cup X_2) = m(X_1) + m(X_2)$ для любых непересекающихся или «почти непересекающихся» X_1, X_2; смысл этого «почти» в каждом конкретном случае легко уточнить.

Например, если E — плоскость Π и $\mathscr{E}$ — множество объединений конечного числа замкнутых треугольников, то говорят, что X_1, X_2 «почти не пересекаются», если $X_1 \cap X_2$ есть объединение конечного числа точек и отрезков прямых; тогда площадь является мерой на $\mathscr{E}$ в вышеуказанном смысле.

В этой общей схеме множество $\mathscr{E}$ есть, следовательно, множество подмножеств множества E, устойчивое относительно объединения конечного числа членов, а m — некоторая функция.

Каждой группе $\mathscr{A}$ углов, отождествленной с окружностью T плоскости C комплексных чисел, оказывается возможным эффективным образом поставить в соответствие привилегированную меру такого рода с общей массой 1, инвариантную относительно групповой операции этой группы; ее называют *мерой Хаара* на группе. Эта мера имеет некоторое отношение к тому, что мы называем «мерой углов», и именно в связи с этим возникает путаница, царящая зачастую в преподавании всюду, где речь заходит об измерении углов.

Но то, что мы ищем, не есть функция множества, так как нельзя трактовать сумму двух углов как объединение двух множеств. Нельзя также определить искомую меру как представление группы $\mathscr{A}$ углов в аддитивной группе поля R, т. е. как числовую функцию f, такую, что

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta),$$

потому что тогда для прямого угла d мы получили бы

$$4f(d)=f(4d)=f(0)=0,$$

откуда $f(d)=0$, что неприемлемо.

Мы вынуждены действовать в обратном порядке и принять за «меру углов» представление группы R в группе $\mathscr{A}$. Для того чтобы подчеркнуть интуитивную идею, лежащую в основе этого определения, мы используем конкретную модель группы $\mathscr{A}$. Рассмотрим окружность C_r с центром в точке 0 и радиусом r; пусть ω — некоторая произвольная точка окружности C_r; для любого угла α обозначим через $\varphi(\alpha)$ точку окружности C_r, для которой $\widehat{\omega 0 \varphi(\alpha)}=\alpha$. Взаимно однозначное отображение $\alpha \rightarrow \varphi(\alpha)$ множества $\mathscr{A}$ на C_r задает на этой окружности структуру группы, изоморфную $\mathscr{A}$, с соответствующим изоморфизмом φ, нейтральным элементом этой группы будет ω.

Мерой углов будет не что иное, как представленная в математической форме операция наматывания нити (представляющей R) на C_r таким образом, что начало нити R отображается на начало ω окружности C_r.

Видно заранее, что эта операция будет неоднозначной, поскольку, с одной стороны, радиус r произволен, а с другой стороны, наматываемая нить может быть ориентирована двумя различными способами (рис. 12).

11 Зак. 323

76. Определение и очевидные следствия

Определение 76.1. *Мерой угла* называется всякое непрерывное отображение φ поля R на аддитивную группу $\mathscr{A}$ углов, такое, что для любых $x, y \in R$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y). \tag{1}$$

Непрерывность, о которой здесь идет речь, соответствует топологии группы $\mathscr{A}$, задаваемой изомор-

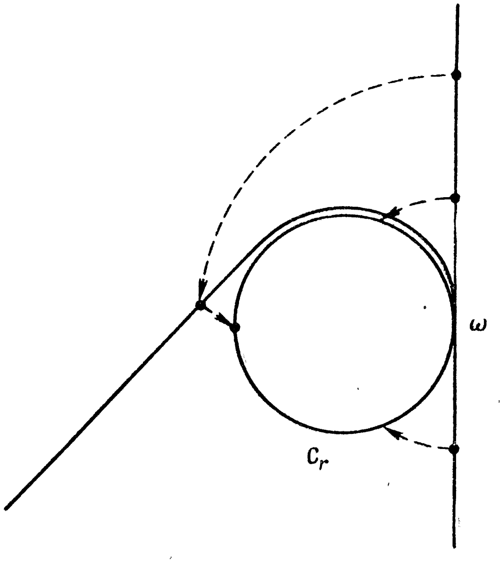

Рис. 12.

физмом группы $\mathscr{A}$ и мультипликативной группы T комплексных чисел.

Из соотношения (1) следует, что эта непрерывность эквивалентна следующему условию:

$\varphi(x)$ стремится к 0, если x стремится к 0.

Для любого числа $k \neq 0$ отображение $x \to kx$ есть непрерывный изоморфизм аддитивной группы R на себя, и, следовательно, отображение $x \to \varphi(kx)$ будет также непрерывным представлением группы R в $\mathscr{A}$, *В элементарном курсе геометрии мы будем считать, что существует такое представление φ и что все другие представления совпадают с теми, которые мы только что связали с представлением φ.*

Элементарного доказательства этого факта не существует; следовательно, необходимо, чтобы мы открыто сказали об этом, как того требует честность, не пытаясь это доказать. Можно показать правдоподобность этого факта, пользуясь моделью типа «нить, накручиваемая на окружность».

Свойства такой меры φ

Если φ — непрерывное представление группы R в $\mathscr{A}$, то $\varphi^{-1}(0)$ есть замкнутая подгруппа группы R; существует такой элемент $x \neq 0$, что $\varphi(x) = \varpi$, откуда следует, что $\varphi(2x) = 0$; значит, $\varphi^{-1}(0)$ отлично от R и от $\{0\}$; это будет, следовательно, множество чисел na $(n \in Z)$, кратных некоторому числу $a > 0$, называемому периодом меры φ.

Для всех $x \in R$ и всех $n \in Z$

$$\varphi(x + na) = \varphi(x) + \varphi(na) = \varphi(x).$$

Угол $\varphi(a/2)$, будучи удвоенным, равен 0; следовательно, он равен 0 или ϖ; но так как $a/2$ не кратно a, то $\varphi(a/2) = \varpi$.

Следовательно, удвоенный угол $\varphi(a/4)$ равен ϖ, откуда $\varphi(a/4)$ — прямой угол.

Выберем в плоскости Π в качестве репера некоторый ортонормированный базис; тогда говорят, что φ положительно, если $\varphi(a/4)$ есть положительный прямой угол; если φ не положительно, то $-\varphi$ положительно.

Для любого числа $b > 0$ существует единственная положительная мера ψ с периодом b. Если φ — произвольная положительная мера с периодом a, то мерой ψ служит отображение

$$x \to \varphi\left(\frac{a}{b} x\right).$$

В зависимости от того, равно ли a 400, 360 или 2π (длина окружности радиуса 1), говорят, что единицей меры φ является град*), градус или радиан.

Для любого угла α_0 уравнение $\varphi(x)=\alpha_0$ имеет хотя бы одно решение, потому что $\varphi(R)=\mathscr{A}$; если x_0 — это решение, то данное уравнение может быть записано в виде $\varphi(x-x_0)=0$; следовательно, его решениями будут числа $x=x_0+na$ (где $n\in Z$). Каждое из них называется значением меры угла α_0; то из этих чисел, которое принадлежит отрезку $[0, a[$, иногда называется главным значением меры угла α_0.

Всякое равенство $\alpha_1=\alpha_2$ может теперь быть представлено в следующем виде:

(x_1-x_2) есть число, кратное a, где x_i — произвольное значение меры угла α_i $(i=1, 2)$.

Приложение. Пусть $\alpha_0\in\mathscr{A}$ и $p\in Z$; равенство $p\alpha=\alpha_0$ в $\mathscr{A}$ эквивалентно равенству $px=x_0+na$, где x, x_0 — произвольные значения меры углов α, α_0. Следовательно,

$$\alpha=\varphi\left(\frac{x_0}{p}+\frac{na}{p}\right)=\varphi\left(\frac{x_0}{p}\right)+\varphi\left(\frac{na}{p}\right).$$

Существует p различных решений, получаемых при $n=0, 1, \ldots, (p-1)$.

77. Схема доказательства существования непрерывного представления группы R в группе T

Существуют различные доказательства существования непрерывного представления группы R в мультипликативной группе T комплексных чисел модуля 1; вот одно из них:

Для любого комплексного z ряд $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ сходится абсолютно; пусть $f(z)$ — его сумма; это непрерывная функция от z (сходимость «нормальна» на всем круге и, следовательно, равномерна).

Можно проверить (произведение абсолютно сходящихся рядов!) тождество

$$f(u+v)=f(u)\,f(v).$$

*) Применяемая иногда единица измерения углов — сотая часть прямого угла.

Так как

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad (\text{где } \overline{x+iy} = x - iy),$$

то, в частности, получаем для всех $y \in R$

$$f(iy)\overline{f(iy)} = f(iy) f(-iy) = f(0) = 1, \text{ откуда } |f(iy)| = 1.$$

Отображение φ, определяемое как $y \to f(iy)$, будет, следовательно, непрерывным представлением группы R в T.

Для того чтобы доказать, что $\varphi(R) = T$, положим

$$\varphi(y) = c(y) + is(y) \quad (c(y) \text{ и } s(y) - \text{действительные числа}).$$

Функции c и s дифференцируемы (дифференцирование рядов) и

$$c' = -s \quad \text{и} \quad s' = c.$$

Из этих соотношений и из равенства $c(0) = 1$ элементарно выводится, что существует такое число $l > 0$, для которого

$$c(l) = 0 \text{ и } c,\ s \geqslant 0 \text{ на } [0, l].$$

Отсюда следует, что $s(l) = 1$, а также что $\varphi(l) = i$ и что $\varphi([0, l])$ есть множество элементов группы T, действительная и мнимая часть которых положительна; отсюда сразу получаем, что $\varphi([0, 4l]) = T$ и что $4l$ — период меры φ.

Длину дуги $\varphi([0, l])$ группы T вычислить легко: действительно, так как

$$c'^2 + s'^2 = s^2 + c^2 = 1,$$

то длина этой дуги равна l; она имеет классическое обозначение $\pi/2$ (точное вычисление числа π производится, например, исходя из формулы Мешэна *), использующей разложение в ряд функции $\operatorname{arctg} x$).

Единственность. Утверждение, что все непрерывные представления группы R в T могут быть получены из какого-то одного из них путем композиции этого представления с автоморфизмом $x \to kx$ группы R, сводится к утверждению, что если период одного такого представления ψ равен 2π и если $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$,

---

*) Так называется следующая формула:

$$\pi = 16\left(1 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{239^5} - \ldots\right)$$

(она получается элементарными преобразованиями из разложения в ряд функции $\operatorname{arctg} x$ и соотношения $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{4}$, если $\frac{x+y}{1-xy} = 1$); эта формула отличается быстротой сходимости стоящего в правой части ряда, что делает ее очень удобной для приближенного вычисления π.

то это есть не что иное, как только это изученное представление φ.

Чтобы в этом убедиться, покажем сначала, что образы чисел отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ при представлениях φ и ψ совпадают; это следует из того факта, что для всякого целого $n > 0$ имеет место равенство

$$\psi\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2^n}\right);$$

следовательно, φ и ψ совпадают на множестве чисел вида $\frac{p\pi}{2^n}$, которое всюду плотно в R; поэтому непрерывность представлений φ и ψ влечет равенство $\varphi = \psi$.

Замечания. 1. В анализе функции c и s называют косинусом и синусом; эта терминология оправдана тем, что, например, $s(t)$ равно синусу угла, связанного с $\varphi(t)$. Это удобная условность; но следует помнить, что при этом мера угла предполагается положительной и за единицу измерения принят радиан.

2. В элементарном курсе анализа доказывается, что для всякой меры углов φ отображение $t \to \sin(\varphi(t))$ дифференцируемо; делают это, скорее «показывая», чем доказывая, справедливость равенства

$$\lim_{t \to 0} \sin(\varphi(t))/t = 1,$$

где φ — положительная мера угла в радианах.

Было бы честнее прямо сказать, что допускается существование некоторого представления φ, удовлетворяющего этому соотношению; впоследствии будет доказано, что для такого φ выполняется равенство $dx^2 + dy^2 = dl^2$; это соотношение может быть интерпретировано на интуитивном уровне («накручивание» R на T).

78. Арифметическая мера угла

Определение 78.1. Пусть φ — некоторая мера угла в радианах. Для любого угла α *арифметической мерой этого угла* (в радианах) называется положительное число $p(\alpha)$, определяемое условием $p(\alpha) = \inf |x|$ (inf берется по всем x, удовлетворяющим равенству $\varphi(x) = \alpha$).

Очевидно, что $p(\alpha) = p(-\alpha)$, так как $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

Покажем, что

$$p(\alpha + \beta) \leqslant p(\alpha) + p(\beta).$$

Действительно, найдется такое $x \in R$, что $\varphi(x) = \alpha$ и $|x| = p(\alpha)$; найдется также такое $y \in R$, что $\varphi(y) = \beta$ и $|y| = p(\beta)$.

Но $\varphi(x + y) = \alpha + \beta$; следовательно,

$$p(\alpha + \beta) \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y| = p(\alpha) + p(\beta).$$

Отсюда получаем, что если для любых $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$ положить

$$d(\alpha, \beta) = p(\beta - \alpha),$$

то d будет расстоянием на $\mathscr{A}$, инвариантным относительно переносов группы $\mathscr{A}$.

Отсюда же получаем расстояние на множестве направлений лучей, полагая

$$d(A, B) = p(\widehat{AB}).$$

Замечание. Всякий угол, отличный от ϖ, характеризуется своей арифметической мерой и ориентацией; это объясняет, хотя и не оправдывает, тот факт, что углы можно изучать, исходя из их арифметической меры и ориентации.

Упражнения к главе VII

1. Пусть f — непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в группу $T = R/Z$, такое, что $f(a) = 0$, и пусть φ — каноническое отображение группы R на T.

Показать, что существует, и притом единственное, непрерывное отображение g отрезка $[a, b]$ в R, такое, что $g(a) = 0$ и $f = \varphi \circ g$.

2. Пусть (α_i) — любое конечное семейство углов одинаковой ориентации. Обозначим через p арифметическую меру углов; показать, что

$$\left(\sum p(\alpha_i) \leqslant \pi\right) \Rightarrow \left(p\left(\sum \alpha_i\right) = \sum p(\alpha_i)\right).$$

3. Показать, что для любого треугольника (a, b, c) с несовпадающими вершинами сумма арифметических мер углов этого треугольника равна π.

ГЛАВА VIII

ОКРУЖНОСТЬ

79. Определение окружности; симметрии окружности

Определение 79.1. Пусть $a \in \Pi$ и ρ — некоторое положительное число. Три части плоскости Π, определяемые соотношениями

$$d(a, x) = \rho; \quad d(a, x) < \rho; \quad d(a, x) > \rho,$$

называются соответственно *окружностью радиуса* ρ *с центром в точке* a, *внутренней областью окружности, или кругом, и внешней областью окружности.*

Будем обозначать окружность и круг соответственно через $C(a, \rho)$ и $D(a, \rho)$.

Множество $D(a, \rho)$ называется также *открытым кругом* радиуса ρ с центром a, а множество $D(a, \rho) \cup \cup C(a, \rho)$ *замкнутым кругом* радиуса ρ с центром a.

Очевидно, что всякий луч с началом в a пересекает $C(a, \rho)$ в единственной точке и что a есть центр симметрии множества $C(a, \rho)$.

Предложение 79.2. 1. *Точка* a — *единственный центр симметрии множества* $C(a, \rho)$.

2. *Осями симметрии множества* $C(a, \rho)$ *являются прямые, проходящие через точку* a, *и только эти прямые.*

Доказательство. 1. Пусть a' — некоторый центр симметрии множества $C(a, \rho)$, и пусть D — прямая, проходящая через a и a'. Прямая D пересекает $C(a, \rho)$ в двух точках; точки a и a' — середины этой пары точек, следовательно, $a = a'$.

2. Пусть D — прямая, проходящая через a, и пусть φ — осевая симметрия с осью D;

$$(x \in C(a, \rho)) \Rightarrow (d(a, \varphi(x)) = d(a, x) = \rho) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\varphi(x) \in C(a, \rho)).$$

Следовательно,

$$\varphi(C(a, \rho)) \subset C(a, \rho),$$

откуда

$$C(a, \rho) = \varphi^2(C(a, \rho)) \subset \varphi(C(a, \rho)),$$

Поэтому $\varphi(C(a,\rho)) = C(a,\rho)$; иначе говоря, D есть ось симметрии множества $C(a,\rho)$.

В обратную сторону: пусть D —ось симметрии множества $C(a,\rho)$, и пусть D' — перпендикуляр к D, проходящий через a; D и D' — две перпендикулярные оси симметрии; следовательно, их пересечение есть центр симметрии множества $C(a,\rho)$, т. е. a. Иначе говоря, D проходит через a.

Следствие 79.3. $(C(a,\rho) = C(a',\rho')) \Leftrightarrow (a = a'$ и $\rho = \rho')$.

Действительно, поскольку a и a' — центры симметрии одной и той же окружности, то $a = a'$; отсюда очевидно следует, что $\rho = \rho'$.

Следствие 79.4. *Множество $C(a,\rho)$ устойчиво относительно любого вращения вокруг a. Более точно, окружности $C(a,\rho)$ и множество $\{a\}$ являются траекториями группы $\mathscr{R}_a$ вращений вокруг точки a.*

Следствие 79.5. *Для всякой пары C, C' окружностей прямая, соединяющая их центры (предполагаемые различными), является осью симметрии множеств $C \cup C'$ и $C \cap C'$.*

80. Образ окружности при преобразовании подобия

Предложение 80.1. *Образом окружности $C(a,\rho)$ при преобразовании подобия f с коэффициентом k будет окружность $C(f(a), k\rho)$.*

Доказательство. Имеют место следующие очевидные импликации:

$$(x \in C(a, \rho)) \Rightarrow (d(a, x) = \rho) \Rightarrow (d(f(x), f(a)) = k\rho) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f(x) \in C(f(a), k\rho)).$$

Иначе говоря,

$$f(C(a, \rho)) \subset C(f(a), k\rho). \tag{1}$$

Преобразование f^{-1}, обратное к преобразованию f, есть преобразование подобия с коэффициентом k^{-1}; следовательно, аналогичным образом получаем

$$f^{-1}(C(f(a), k\rho)) \subset C(a, \rho). \tag{2}$$

Применив f к обеим частям включения (2), получим

$$C(f(a), k\rho) \subset f(C(a, \rho)). \tag{3}$$

Сравнение включений (1) и (3) доказывает предложение.

Предложение 80.2. *Для всякой пары окружностей* $C(a, \rho)$, $C(a', \rho')$ *найдется в точности два (различных между собой) растяжения плоскости* Π, *переводящих первую из них во вторую; коэффициенты этих растяжений противоположны.*

Доказательство. В центрированной плоскости $(\Pi, 0)$ образ окружности $C(a, \rho)$ при преобразовании $x \to hx + b$ $(h \in R^*, b \in (\Pi, 0))$ есть по предложению 80.1 окружность радиуса $|h|\rho$ с центром в точке $ha + b$.

Так как эта окружность совпадает с окружностью $C(a', \rho')$, то

$$a' = ha + b; \quad \rho' = |h|\rho.$$

Эти соотношения эквивалентны следующим равенствам:

$$h = \frac{\rho'}{\rho} \quad \text{или} \quad h = -\frac{\rho'}{\rho}; \quad b = a' - ha.$$

Эти последние точно определяют искомые растяжения; они различны, поскольку их коэффициенты противоположны по знаку.

Частные случаи

1°. $\rho = \rho'$; одно из двух растяжений есть перенос $x \to x + (a' - a)$, а другое — центральная симметрия с центром в середине пары (a, a').

2°. $a = a'$; растяжения — две гомотетии с центрами в точке $a = a'$.

3°. Если $\rho \neq \rho'$ и $a \neq a'$, то оба растяжения — гомотетии; их центры, очевидно, лежат на прямой $\Delta(a, a')$ и делят пару (a, a') в отношениях ρ/ρ' и $-\rho/\rho'$, так что они гармонически сопряжены относительно этой пары точек.

Замечание. Все только что сказанное об окружностях справедливо также как для кругов, так и для внешних областей окружностей.

81. Выпуклость круга

Предложение 81.1. *Всякий открытый (или замкнутый) круг есть выпуклое множество.*

Доказательство. Действительно, допустим, что $b, c \in D(a, \rho)$. По следствию 40.4

$$(x \in [b, c]) \Rightarrow (d(a, x) \leqslant \sup(d(a, b), d(a, c))),$$

откуда $d(a, x) < \rho$.

Для замкнутого круга доказательство аналогично.

Следствие. *Пересечение двух кругов (называемое линзой) выпукло. Пересечение круга и полуплоскости (называемое сегментом) выпукло.*

82. Пересечение круга и прямой

Предложение 82.1. *Пусть D — некоторая прямая, C — окружность радиуса ρ с центром a и d — расстояние от a до D; обозначим через D' перпендикуляр* *к прямой D, проходящий через a, и через x_0 — точку пересечения прямых D и D'. Тогда*

$(d > \rho) \Rightarrow (D \cap C = \emptyset)$ *и внешняя область окружности C содержит D;*

$(d = \rho) \Rightarrow (D \cap C = \{x_0\})$ *и внешняя область окружности C содержит $D \setminus \{x_0\}$;*

$(d < \rho) \Rightarrow (D \cap C = \{x_1, x_2\}$, *где* $x_1 \neq x_2)$ *и*

$$\begin{cases} \text{внутренняя область } C \text{ содержит }]x_1, x_2[; \\ \text{внешняя область } C \text{ содержит } D \setminus [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Это предложение есть простое следствие предложения 40.1.

Следствие 82.2. *Если u и v принадлежат соответственно внешней и внутренней областям окружности C, то отрезок $[u, v]$ пересекает C и притом в единственной точке.*

Действительно, пусть D — прямая, содержащая u и v; очевидно, имеет место третий случай предыдущего предложения; следовательно, $u \in]x_1, x_2[$ и $v \in D \setminus [x_1, x_2]$; отсюда сразу следует доказываемое свойство.

Приложение. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \Pi$, причем u_1 принадлежит внутренней области окружности C, а u_n — внешней; тогда среди отрезков $[u_i, u_{i+1}]$ найдется такой, который пересекает C.

Действительно, пусть p — наибольший из индексов i, для которых u_i принадлежит внутренности окружности; дано, что $p \neq n$ и u_{p+1} принадлежит внешней области окружности; следовательно, $[u_p, u_{p+1}]$ пересекает C.

83. Касательная к окружности

Определение 83.1. *Касательной* к окружности $C(a, \rho)$ в точке x этой окружности называется прямая D, проходящая через x и перпендикулярная прямой $\Delta(a, x)$.

Из предложения 82.1 следует, что D пересекается с окружностью в единственной точке x и что множество $(D\setminus\{x\})$ лежит во внешней области окружности; это значит, что не существует точки внутри окружности, через которую проходит какая-нибудь касательная к этой окружности, и что единственной касательной, проходящей через точку x окружности, будет касательная к окружности в этой точке.

Имеют место следующие очевидные эквивалентности:

$$(D - \text{касательная к } C \text{ в } x) \Leftrightarrow (D \cap C = \{x\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\text{проекция точки } a \text{ на } D \text{ есть } x \text{ и } d(a, x) = \rho).$$

Предложение 83.2. *При любом преобразовании подобия f плоскости Π для всякой окружности C имеет место эквивалентность*

$$(D - \textit{касательная к } C \textit{ в } x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f(D) - \textit{касательная к } f(C) \textit{ в } f(x)).$$

Доказательство. Это следует, например, из того, что оба сформулированных в предложении свойства могут быть представлены соответственно в следующем виде:

$$(D \cap C) = \{x\} \quad \text{и} \quad (f(D) \cap f(C)) = f(x).$$

В частности, если f — растяжение, то касательные к окружностям C и $f(C)$ в соответствующих точках параллельны.

84. Пересечение двух окружностей

Пусть $C(a, \rho)$ и $C(a', \rho')$ — две окружности; если они имеют общую точку x, то расстояния между точками тройки (a, a', x) равны соответственно $d(a, a')$, ρ', ρ.

И наоборот, если найдется на плоскости треугольник (b, b', y) со сторонами $d(a, a')$, ρ', ρ, то существует движение f, отображающее (b, b') на (a, a'); точка $f(y)$ принадлежит в этом случае обеим окружностям.

Применив один из критериев существования треугольника на плоскости с данными длинами сторон (предложение 39.5), можно, следовательно, сформулировать следующее утверждение:

Предложение 84.1. *Пусть* C, C' — *две окружности с радиусами* ρ, ρ', *расстояние между центрами которых равно* d. *Тогда*

$$(C \cap C' \neq \emptyset) \Leftrightarrow (|\rho - \rho'| \leqslant d \leqslant \rho + \rho').$$

Это предложение легко дополнить следующим:

Если $d=0$, то условие пересечения запишется в виде $\rho=\rho'$, и в этом случае $C \cap C' = C = C'$.

Если $d \neq 0$ и имеют место строгие неравенства, то $C \cap C' = \{x_1, x_2\}$, где x_1 и x_2 различны и симметричны относительно прямой, проходящей через центры окружностей.

Если хотя бы одно из неравенств обращается в равенство, то $x_1 = x_2$ и обе окружности имеют общую касательную в этой точке (в этом случае говорят, что они касаются).

85. Уравнение окружности

Пусть (u_1, u_2) — ортонормированный базис плоскости (П, 0); через x_1, x_2 будут обозначаться координаты точки x относительно этого базиса.

Предложение 85.1. $(x \in C(a, \rho)) \Leftrightarrow ((x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \rho^2)$.

Доказательство. Действительно, свойство $(x \in C(a, \rho))$ может быть записано в виде $d^2(a, x) = \rho^2$, откуда следует искомая эквивалентность.

Соотношение $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \rho^2$ есть равенство вида:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + \gamma = 0.$$

Исследуем, в каком случае такое уравнение будет уравнением окружности.

Оно может быть представлено в виде

$$(x_1+\alpha)^2+(x_2+\beta)^2+\gamma-\alpha^2-\beta^2=0.$$

Если $\gamma > \alpha^2+\beta^2$, то, так как сумма первых двух слагаемых всегда больше 0, решения не существует.

Если $\gamma=\alpha^2+\beta^2$, то единственным решением будет точка $(-\alpha, -\beta)$.

Если $\gamma<\alpha^2+\beta^2$, то, положив $\rho=(\alpha^2+\beta^2-\gamma)^{1/2}$, получим, очевидно, уравнение окружности с центром в точке $(-\alpha, -\beta)$ и радиусом ρ.

Окружность $C(a, \rho)$ проходит через точку 0 тогда и только тогда, когда

$$a_1^2+a_2^2=\rho^2 \quad \text{или} \quad \gamma=0.$$

86. Некоторые характеристические свойства окружности

Перечислим некоторые классические свойства окружности, которые хорошо предложить в качестве упражнений, не преувеличивая, однако, их значения.

1. Пусть a, $b\in\Pi$ и точка 0 — середина пары (a, b). Для всех $x\in C(0, \rho)$ имеет место равенство

$$d^2(x, a)+d^2(x, b)=2\rho^2+2d^2(0, a).$$

Обратно, для любого $k>2d^2(0, a)$ множество точек $x\in\Pi$, таких, что $d^2(x, a)+d^2(x, b)=k$, есть окружность с центром в точке 0.

2. Пусть a, $b\in\Pi$, $a\neq b$ и k — положительное число; обозначим через E множество таких точек x плоскости Π, для которых

$$d(x, a)=kd(x, b).$$

Нахождение E с помощью способов, называемых элементарными, — довольно тонкая задача; здесь мы сталкиваемся с прекрасной возможностью применить точные методы и проиллюстрировать мощность средств алгебры.

Выберем ортонормированный базис так, чтобы его первая ось проходила через точки a, b. Данное равенство запишется тогда в виде

$$d^2(x, a)-k^2d^2(x, b)=0$$

или

$$((x_1-a)^2+x_2^2)-k^2((x_1-b)^2+x_2^2)=0.$$

Если $k=1$, то множество E есть, очевидно, медиатриса пары (a, b).

Если $k\neq 1$, то это уравнение, очевидно, можно переписать так (разделив его на $(1-k^2)$):

$$x_1^2+x_2^2+2\alpha x_1+2\beta x_2+\gamma=0.$$

Так как E содержит две различные точки m_1, m_2 прямой $\Delta(a, b)$, то рассуждение, аналогичное проведенному в доказательстве предложения 85.1, показывает, что E есть окружность; так как $\Delta(a, b)$ есть, очевидно, ось симметрии множества E, то диаметр этой окружности равен (m_1, m_2); заметим, что (m_1, m_2) делит отрезок (a, b) гармонически.

Обратно, если C — произвольная окружность, a, b — две произвольные различные точки некоторой оси симметрии D окружности C, гармонически сопряженные относительно точек m_1, m_2 множества $C\cap D$, то множество точек x, таких, что

$$d(x, a)=kd(x, b), \quad \text{где} \quad k=\frac{d(m_1, a)}{d(m_1, b)}=\frac{d(m_2, a)}{d(m_2, b)},$$

очевидно, совпадает с C.

Можно, далее, рассмотреть множество окружностей, получающихся при различных значениях k и фиксированных a, b (это будет пучок окружностей); исследовать пучок, сопряженный этому пучку *), и т. д.

3. При исследовании множества точек, из которых некоторый отрезок виден под заданным углом, обычно различаются углы, образованные прямыми, и углы, образованные лучами. Мы сейчас увидим, что при соответствующей формулировке можно обойтись без углов между прямыми и очень просто решить эту задачу.

---

*) Относительно упоминаемых здесь понятий геометрии окружностей см., например: «Энциклопедия элементарной геометрии», кн. IV (геометрия), М., Физматгиз, 1963, статья «Окружности».

Лемма 86.1. *Пусть $(x, 0, y)$ — тройка попарно различных точек, образующая равнобедренный треугольник: $d(0, x) = d(0, y)$. Тогда имеет место равенство*

$$\widehat{x0y} + 2\widehat{0yx} = \widehat{x0y} + 2\widehat{yx0} = \varpi.$$

Доказательство. Действительно (следствие 59.2), имеет место равенство

$$\widehat{x0y} + \widehat{0yx} + \widehat{yx0} = \varpi \quad \text{и} \quad \widehat{0yx} = \widehat{yx0}.$$

Предложение 86.2. *Для всякой тройки (a, x, b) неколлинеарных точек плоскости Π имеет место равенство*

$2\widehat{axb} = \widehat{a0b}$, *где 0 — центр окружности, проходящей через точки a, b, x.*

Доказательство. Действительно, по лемме 86.1 для равнобедренных треугольников $(x, 0, a)$ и $(b, 0, x)$ имеют место равенства

$$\widehat{x0a} + 2\widehat{ax0} = \varpi \quad \text{и} \quad \widehat{b0x} + 2\widehat{0xb} = \varpi.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\widehat{b0a} + 2\widehat{axb} = 0, \quad \text{или} \quad 2\widehat{axb} = \widehat{a0b}.$$

Следствие 86.3. *Пусть a, b — различные точки плоскости Π и $\alpha \neq 0$ — некоторый угол; рассмотрим окружность C, проходящую через a и b, центр которой определяется из условия*

$$2\widehat{ba0} = (\varpi - \alpha).$$

Тогда для всех $x \neq a$, b имеет место эквивалентность

$$(x \in C) \Leftrightarrow (2\widehat{axb} = \alpha).$$

Доказательство. Действительно, для любой точки 0 медиатрисы пары (a, b) равенство $2\widehat{ba0} = (\varpi - \alpha)$ эквивалентно равенству $\widehat{a0b} = \alpha$; с другой стороны, если a, x, b принадлежат одной прямой, то

$$2\widehat{axb} = 0 \neq \alpha.$$

Пусть теперь $x \in \Pi$, причем $x \neq a$ и $x \neq b$.

Если $x \in C$, то из предложения 86.2 следует, что $2\widehat{axb} = \widehat{a0b} = \alpha$; и наоборот, если $2\widehat{axb} = \alpha$, то точки a, x, b не принадлежат одной прямой. Если $0'$ — центр окружности, проходящей через эти точки, то из того же предложения следует, что $\widehat{a0'b} = \alpha$ и, следовательно, $0 = 0'$ и $x \in C$.

Замечание. Пусть β_1, β_2 — два решения уравнения $2\beta_i = \alpha$. Тогда $\beta_i \neq 0$, $\beta_i \neq \varpi$ $(i = 1, 2)$ и $\beta_1 - \beta_2 = \varpi$; следовательно, один из этих углов имеет положительную ориентацию, а другой — отрицательную.

Однако в зависимости от того, в какой из открытых полуплоскостей Π_1, Π_2, определяемых прямой $\Delta(a, b)$, находится точка x, угол $\widehat{axb}$ будет иметь положительную или отрицательную ориентацию (свести к рассмотрению угла $\widehat{xba}$, пользуясь предложением 69.1).

Следовательно, на одной из дуг $C \cap \Pi_i$ угол $\widehat{axb}$ равен β_1, а на другой — β_2. Отсюда следует, что для любого угла β множество точек x плоскости Π, таких, что

$$\widehat{axb} = \beta,$$

есть дуга окружности с концами a и b.

87. Степень точки относительно окружности

Определение 87.1 *Степенью точки* x плоскости Π *относительно окружности* $C(a, \rho)$ называется число

$$P(x) = d^2(a, x) - \rho^2.$$

Функция $x \to P(x)$ называется *степенью относительно* $C(a, \rho)$.

Очевидно, в зависимости от того, лежит точка x внутри окружности, вне нее или принадлежит ей, имеет место одно из соотношений

$$P(x) < 0; \quad P(x) > 0; \quad P(x) = 0.$$

В произвольном ортонормированном базисе получаем

$$P(x) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - \rho^2.$$

Предложение 87.2. *Пусть P — степень относительно некоторой окружности C; рассмотрим точку $x \in \Pi$.*

1. *Для любых диаметрально противоположных точек p, q окружности C имеет место равенство*

$$P(x) = \overrightarrow{xp} \cdot \overrightarrow{xq}.$$

2. *Для любых различных точек p, p' окружности C, лежащих на одной прямой с точкой x, имеет место равенство*

$$P(x) = \overrightarrow{xp} \cdot \overrightarrow{xp'} = \overline{xp} \cdot \overline{xp'}.$$

3. *Если точка x принадлежит касательной к окружности C в точке p, то*

$$P(x) = (\overrightarrow{xp})^2 = d^2(x, p).$$

Доказательство. Пусть a — центр окружности C и ρ — ее радиус.

1. $$\overrightarrow{xp} \cdot \overrightarrow{xq} = (\overrightarrow{xa} + \overrightarrow{ap}) \cdot (\overrightarrow{xa} - \overrightarrow{ap}) = \overrightarrow{xa}^2 - \overrightarrow{ap}^2 = d^2(a, x) - \rho^2 = P(x).$$

2. Пусть q — точка, симметричная точке p относительно центра a; известно, что $\overrightarrow{p'q}$ и $\overrightarrow{xp}$ перпендикулярны; следовательно,

$$\overrightarrow{xp} \cdot \overrightarrow{xp'} = \overrightarrow{xp} \cdot (\overrightarrow{xq} + \overrightarrow{qp'}) = \overrightarrow{xp} \cdot \overrightarrow{xq} = P(x).$$

3. Из прямоугольного треугольника (x, a, p) получаем

$$d^2(x, p) = d^2(a, x) - \rho^2 = P(x).$$

Радикальная ось и пучки окружностей

Пусть C и C' — две несовпадающие окружности, P и P' — степени относительно этих окружностей, k — произвольное число.

Проделав несложные выкладки, можно найти (в подходящем ортонормированном базисе) уравнение, задающее множество точек x, таких, что $P(x) = kP'(x)$, и сравнить полученный результат с результатом для окружностей, задаваемых уравнением

$$d(x, a) = hd(x, b).$$

Упражнения к главе VIII

1. Пусть X — внешняя область некоторой окружности. Показать, что X связно, в том смысле, что две произвольные точки множества X могут быть соединены ломаной, все звенья которой принадлежат X.

2. Показать, что всякий замкнутый (соответственно открытый) круг есть пересечение семейства замкнутых (соответственно открытых) полуплоскостей. Вывести отсюда, что такой круг есть выпуклое множество.

3. Пусть D — замкнутый круг в плоскости Π. Показать, что для любой точки $x \in \Pi$ найдется единственная точка $y \in D$, для которой расстояние $d(x, y)$ минимально; эту точку $p(x)$ называют *проекцией точки x на круг D*.

Показать, что такая проекция p на D уменьшает расстояния (т. е. что $d(p(u), p(v)) \leqslant d(u, v)$).

4. Пусть X — произвольное подмножество плоскости Π, $r > 0$ — некоторое число и δ — направление прямой.

Каково множество точек касания касательных к окружностям $C(x, r)$, где $x \in X$, имеющих направление δ?

5. Пусть X — произвольное подмножество плоскости Π, точка $0 \in \Pi$ и δ — направление прямой. Рассмотрим множество Y точек касания прямых направления δ и проходящих через точку 0 окружностей, центры которых принадлежат X; как найти Y, зная X?

6. Пусть A, B — две прямые и $u \in A$, $v \in B$ $(u \neq v)$. Для любой точки x, отличной от u и v, обозначим через $\alpha(x)$ (соответственно $\beta(x)$) окружность или прямую, проходящую через x и касающуюся прямой A в точке u (соответственно прямой B в точке v). Каково множество точек x, таких, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ касаются?

7. Пусть f — собственное преобразование подобия плоскости Π и $a \in \Pi$.

Каково множество точек x, таких, что $x \neq f(x)$, и таких, что $a \in \Delta(x, f(x))$?

8. Пусть C, C' — две окружности различного радиуса.

Найти множество собственных преобразований подобия, переводящих C в C'. Та же задача для зеркальных преобразований подобия; показать, что оси этих преобразований подобия проходят через одну неподвижную точку.

9. Пусть D — некоторая прямая, C — окружность и k — заданное число.

Для любой точки x обозначим через $P(x)$ степень точки x относительно окружности C и через $d(x)$ — расстояние от точки x до прямой D.

Каково множество точек x, для которых $P(x) = kd(x)$?

10. Пусть $(C_i)_{i \in I}$ — некоторое конечное семейство окружностей и $(\lambda_i)_{i \in I}$ — семейство чисел. Для любого $i \in I$ обозначим через P_i степень относительно C_i.

Каково множество точек x, для которых

$$\sum \lambda_i P_i(x) = C \quad (C \text{ — заданная константа})?$$

В частности, каково это множество, если $\Sigma\lambda_i = 0$?

В каком случае функция $\Sigma\lambda_i P_i$ будет постоянной на плоскости Π?

ГЛАВА IX

ПРОСТРАНСТВО

§ 1. АКСИОМЫ

88. Выбор метода

Мы уже подчеркивали во введении, что для начального дедуктивного курса геометрии плоскости необходима аксиоматика, состоящая из интуитивно ясных аксиом, в которой совершенно отчетливо видна связь между миром, воспринимаемым нашими органами чувств, и миром математики.

Когда же ученик усвоил такую аксиоматику и научился пользоваться векторами и скалярным произведением, то далее уже нет необходимости снова проделывать ту же самую работу при изучении стереометрии, особенно если в результате обращения к подходящему материалу у учащегося возникло интуитивное представление о геометрии пространства и в частности, о декартовой системе координат в пространстве, прямоугольной или нет.

Однако мы увидим, что можно сформулировать аксиоматику пространства, являющуюся расширением аксиоматики плоскости и позволяющую очень быстро, благодаря предшествующему изучению планиметрии, дать определение структуры векторного пространства с заданным в нем скалярным произведением.

Мы полагаем, таким образом, желательным отнести систематическое изучение понятия векторного пространства, снабженного скалярным произведением, на последний класс средней школы (подростки 17—18 лет). Такое изучение, проведенное в рамках пространств произвольной конечной размерности, окажется весьма плодотворным, если ему предшествовало аксиоматическое изучение планиметрии и стереометрии.

Для того чтобы получить аксиоматику пространства из аксиоматики плоскости, нужно добавить к последней весьма немногое:

a) Через любые три точки пространства проходит по крайней мере одна плоскость;

b) Всякая плоскость, содержащая две различные точки некоторой прямой, содержит всю эту прямую;

c) Для любой плоскости P существует разбиение множества-дополнения к P на две непустые части E_1, E_2, такие, что всякий отрезок, концы которого принадлежат соответственно E_1 и E_2, пересекает P.

Однако эти формулировки по-настоящему станут ясны только после присоединения к ним множества остальных аксиом. Кроме того, после такого присоединения мы получим точную аксиоматику элементарной стереометрии.

89. Аксиомы трехмерного пространства

Пространством мы называем некоторое множество E, на котором задана определенная структура путем выделения множества $\mathscr{D}$ подмножеств E, называемых *прямыми*, и множества $\mathscr{P}$ подмножеств E, называемых *плоскостями*; эти прямые и плоскости в свою очередь снабжены структурами, каждая из которых точно описывается совокупностью аксиом; связь между этими структурами определяется другой совокупностью аксиом.

Будем предполагать, что E содержит по крайней мере две различные плоскости, что всякая плоскость содержит по крайней мере две различные прямые и что всякая прямая содержит по крайней мере две различные точки.

Определение 89.1. Говорят, что две прямые A, B *параллельны* (обозначается $A \| B$), если либо ($A = B$), либо A, B принадлежат одной плоскости и не пересекаются.

I. Аксиомы инцидентности

a) *Для любой пары* (x, y) *различных точек множества* E *существует одна и только одна прямая, содержащая* x *и* y.

b) *Для любой плоскости* P, *любой прямой* $D \subset P$ *и любой точки* $x \in P$ *через точку* x *проходит прямая плоскости* P, *параллельная прямой* D, *и притом единственная.*

c) *Всякая плоскость, содержащая две различные точки некоторой прямой, содержит всю эту прямую.*

d) *Для любой тройки* (x, y, z) *точек множества* E *существует по крайней мере одна плоскость, содержащая эти точки.*

II. Аксиомы порядка

a) *Со всякой прямой* D *связаны две структуры линейного порядка на* D, *противоположные друг другу.*

b) *Для любой пары* (A, B) *параллельных прямых и для любых точек* a, b, a', b', *таких, что* a, $a' \in A$ *и* b, $b' \in B$, *всякая прямая, параллельная этим прямым и пересекающая отрезок* $[a, b]$, *пересекает также и отрезок* $[a', b']$.

III. Аксиомы аддитивной структуры

a) *С множеством* E *связано отображение* d *множества* $E \times E$ *в* R_+, *называемое расстоянием, такое, что:*

1. $d(y, x) = d(x, y)$ *для всех* x, y;

2. *Для любой ориентированной прямой* D, *любого* $x \in D$ *и любого числа* $l \geqslant 0$ *на прямой* D *существует единственная точка* y, *такая, что*

$$x \leqslant y \quad \text{и} \quad d(x, y) = l;$$

3. $(x \in [a, b]) \Rightarrow (d(a, x) + d(x, b) = d(a, b))$.

b) *Для любой пары* (A, B) *параллельных прямых и для любых точек* a, b, a', b', *таких, что* a, $a' \in A$ *и* b, $b' \in B$, *всякая прямая, параллельная этим прямым и проходящая через середину пары* (a, b), *проходит также и через середину пары* (a', b').

IV. Аксиомы перпендикулярности и симметричности

a) *Для всякой плоскости P на множестве прямых этой плоскости задано бинарное отношение, называемое отношением перпендикулярности и обозначаемое через $\perp$, такое, что:*

1. $(A \perp B) \Leftrightarrow (B \perp A)$ (симметричность отношения $\perp$).
2. $(A \perp B) \Rightarrow (A$ и B не параллельны).
3. *Для всякой прямой A плоскости P существует по крайней мере одна прямая B этой плоскости, такая, что $A \perp B$.*
4. *Для всякой пары (A, B) прямых плоскости P, таких, что $A \perp B$, и для любой прямой B' плоскости P имеет место эквивалентность*

$$(B \parallel B') \Leftrightarrow (A \perp B').$$

b) *Для любой пары (A_1, A_2) лучей с общим началом имеет место равенство*

$$c(A_1, A_2) = c(A_2, A_1).$$

V. Аксиома размерности

Для любой плоскости P существует разбиение дополнения к P на два непустых подмножества E_1, E_2, таких, что

$$(x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2) \Leftrightarrow (P \cap [x_1, x_2] \neq \emptyset).$$

В формулировках некоторых аксиом используются термины или обозначения, которые, очевидно, в детальном изложении должны быть определены через уже известные термины; таково, например, обозначение $c(A_1, A_2)$. Эти определения очевидным образом копируются с соответствующих определений, даваемых при аксиоматическом построении планиметрии.

В дальнейшем мы будем говорить, что две прямые A, B **пересекаются**, если $A \neq B$ и $A \cap B \neq \emptyset$ (по аксиоме $\mathrm{I_a}$ их пересечение сводится в этом случае к единственной точке). Будем говорить, что прямая D и плоскость P **пересекаются**, если $D \not\subset P$ и $D \cap P \neq \emptyset$ (по аксиоме $\mathrm{I_c}$ их пересечение сводится в этом случае к единственной точке).

90. Первые следствия

Заметим сразу, что на каждой плоскости P пространства E рассматриваемая система аксиом сводится к системе аксиом планиметрии; следовательно, в плоскости P справедливы все установленные ранее результаты.

Мы увидим в дальнейшем, что аксиомы I, II, III, IV характеризуют аффинное пространство самого общего типа, снабженное некоторой метрикой, определяемой скалярным произведением. Аксиома размерности V понадобится нам лишь в самом конце изложения: с ее помощью можно доказать, что размерность пространства равна 3.

Предложение 90.1. *Для любых a, b, $c \in E$, не принадлежащих одной прямой, существует единственная плоскость, содержащая эти точки.*

Доказательство. Из аксиомы $\mathrm{I_d}$ следует, что такая плоскость существует; пусть теперь P_1, P_2 — две плоскости, содержащие a, b, c. Из аксиомы $\mathrm{I_c}$ следует, что P_1 и P_2 содержат $\Delta(a, b)$, $\Delta(b, c)$ и $\Delta(a, c)$; для любой точки x плоскости P_1, не принадлежащей этим прямым, найдется прямая плоскости P_2, пересекающая $\Delta(a, b)$ и $\Delta(b, c)$ в двух различных точках y и z. Так как y, $z \in P_2$, то и $\Delta(y, z) \in P_2$, откуда следует, что $x \in P_2$. Иначе говоря, $P_2 \subset P_1$; аналогично получаем $P_1 \subset P_2$, откуда следует совпадение P_1 и P_2.

Следствие 90.2. *Для любой пары пересекающихся прямых существует единственная плоскость, их содержащая.*

Для всякой прямой D и любой точки $x \notin D$ существует единственная плоскость, содержащая D и x.

Следствие 90.3. *Для любой прямой D и всякой точки x существует, и притом единственная, прямая, параллельная D и проходящая через точку x.*

Докажем следствие 90.3: оно очевидно в случае $x \in D$; в противном случае найдется единственная плоскость P, содержащая D и x; в этой плоскости применим аксиому $\mathrm{I_b}$.

Из этого следствия получаем, что для любой прямой D отношение

«$(x \sim y)$, если существует прямая, параллельная D и содержащая x и y»

есть отношение эквивалентности на E, классами эквивалентности которого являются прямые, параллельные D. Однако на этом этапе мы еще не умеем доказывать, что на множестве $\mathcal{D}$ прямых отношение параллельности есть отношение эквивалентности.

§ 2. АФФИННАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА

91. Центрированное пространство $(E, 0)$

Теперь мы свяжем с пространством, в котором выбрана некоторая начальная точка, структуру векторного пространства над R; для этого нам понадобятся только аксиомы I, II, III. Ниже обозначения $(D, 0)$, $(P, 0)$ соответствуют прямой и плоскости, на которых задана структура векторного пространства, определенная в гл. II.

Определение 91.1. *Для любой точки $0 \in E$ центрированным пространством $(E, 0)$ называется множество E, в котором заданы бинарная операция $(x, y) \to x + y$ и умножение на скаляр, определяемые следующим образом:*

1. *Если 0, x, y не принадлежат одной прямой, то $(x + y)$ есть сумма векторов x, y центрированной плоскости $(P, 0)$, содержащей эти три точки;*

2. *Если 0, x, y принадлежат одной прямой и хотя бы одна из точек x, y отлична от 0, то $(x + y)$ есть сумма векторов x, y центрированной прямой $(D, 0)$, содержащей эти точки;*

3. *Если $x = y = 0$, то $x + y = 0$.*

Наконец, умножение $(\lambda, x) \to \lambda x$ определяется очевидным образом в каждой центрированной прямой $(D, 0)$, содержащей точку x.

Мы можем сразу доказать, основываясь на результатах гл. II, следующее важное

Предложение 91.2. *Центрированное пространство $(E, 0)$ есть векторное пространство на R. Его подпространствами размерности 1 и 2 будут прямые и плоскости, проходящие через точку 0.*

Доказательство. 1. Почти все аксиомы векторного пространства, включая соотношение

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,$$

которое выполняется в центрированной плоскости $(P, 0)$, содержащей точки 0, x, y, легко проверяются; единственным неочевидным свойством является ассоциативность

$$(a+b)+c = a+(b+c). \tag{1}$$

Для проверки этого свойства положим

γ — середина пары (a, b) и α — середина пары (b, c).

Имеют место равенства

$$2\gamma = a+b \quad \text{и} \quad 2\alpha = b+c$$

(рассмотреть плоскости, содержащие $(0, a, b)$ и $(0, b, c)$ соответственно).

Соотношение (1) эквивалентно следующему равенству:

$$\frac{1}{3}(2\gamma + c) = \frac{1}{3}(a + 2\alpha). \tag{2}$$

Однако для любых x, $y \in E$ точка $\frac{1}{3}(x+2y)$ делит пару (x, y) в отношении $k = -2$ (рассмотреть плоскость, содержащую 0, x, y).

Таким образом, соотношение (2) выполняется в соответствии с хорошо известным свойством тройки (a, b, c) точек плоскости (центр тяжести).

2. Прямые множества E, проходящие через 0, суть, очевидно, векторные подпространства размерности 1. Всякая плоскость P, проходящая через точку 0, имеет векторную структуру центрированной плоскости $(P, 0)$; следовательно, она является подпространством размерности 2 центрированного пространства $(E, 0)$. И наоборот, пусть A — векторное подпространство центрированного пространства $(E, 0)$, имеющее размерность 2; если (a_1, a_2) — базис пространства A, то центрированная плоскость $(P, 0)$, содержащая точки 0, a_1, a_2, есть векторное подпространство пространства E, имеющее размерность 2; следовательно, $A = P$.

92. Перенос

Определение 92.1. *Переносом* множества E называется такое отображение f множества E в себя, что для всех x, $y \in E$ точки $(x, y, f(x), f(y))$ образуют параллелограмм (т. е. f таково, что середина пары $(x, f(y))$ совпадает с серединой пары $(y, f(x))$.

Предложение 92.2. *Для любых a, $b \in E$ существует, и притом единственный, перенос, переводящий a в b; для всего пространства $(E, 0)$ таким переносом будет отображение $x \to x + (b - a)$.*

Доказательство. Если существует такой перенос f, что $b = f(a)$, то для любых x имеем (относительно операций, определенных в системе $(E, 0)$)

$$\frac{1}{2}(a + f(x)) = \frac{1}{2}(x + f(a)) = \frac{1}{2}(x + b),$$

откуда

$$f(x) = x + (b - a).$$

И наоборот, легко видеть, что отображение f: $x \to x + (b - a)$ есть перенос и что $f(a) = b$.

Переносы множества E образуют, очевидно, коммутативную и однотранзитивную группу преобразований множества E, изоморфную аддитивной группе $(E, 0)$ с произвольной точкой 0.

Предложение 92.3. *Для любых $a, b \in E$ обозначим через* $\top$ *и* $\bot$ *соответственно сложение в* (E, a) *и* (E, b); *через* $\wedge$ *и* $\vee$ *соответственно умножение на скаляр в этих пространствах и через f — перенос, переводящий a в b.*

Перенос f есть изоморфизм пространства (E, a), *отображающий его на пространство* (E, b); *другими словами, для любых $x, y \in E$ и $\lambda \in R$*

$$f(x \top y) = f(x) \bot f(y)$$

и

$$f(\lambda \wedge x) = \lambda \vee f(x).$$

Первое равенство следует, например, из того, что $b = f(a)$ и что f переводит любой параллелограмм в параллелограмм.

Второе равенство выполняется в плоскости, содержащей точки a, b, x, $f(x)$.

Следствие 92.4. *Перенос f переводит всякую прямую (или плоскость), проходящую через точку a, в прямую (или плоскость), проходящую через точку b.*

Действительно, f есть изоморфизм пространства (E, a) на пространство (E, b), и, следовательно, сохраняет размерность подпространства.

93. Параллельность

Определение 93.1. Говорят, что две плоскости P, P' пространства E *параллельны* (обозначается $P \| P'$), если существует перенос, переводящий P в P'.

Это частный случай общего определения, которое справедливо для любого векторного пространства.

Предложение 93.2. $(P \| P') \Leftrightarrow$ (*Для всех $a \in P$ и всех $a' \in P'$ перенос, переводящий a в a', переводит P в P'*).

Аналогичный результат имеет место для прямых.

Доказательство. Для прямых справедливость свойства уже установлена, так как в этом случае рассматриваются переносы плоскости.

Для плоскостей доказательство то же самое, что и для аффинных подпространств некоторого векторного пространства.

Следствие 93.3. *Параллельность есть отношение эквивалентности на множестве* $\mathscr{D}$ *прямых и на множестве* $\mathscr{P}$ *плоскостей.*

Отсюда выводятся понятия направления прямой и направления плоскости, конкретизированные множествами прямых и плоскостей, проходящих через выбранную начальную точку 0.

Следствие 93.4. *Для любого направления плоскости и для любой точки* $x \in E$ *через эту точку проходит единственная плоскость данного направления* (и то же самое для прямых).

Определение 93.5. Говорят, что *прямая* D *параллельна плоскости* P (обозначается через $D|P$), если для плоскости P' и прямой D', параллельных данным и проходящих через 0, имеет место включение $D' \subset P'$.

Это определение, очевидно, не зависит от выбора точки 0. Определенная таким образом параллельность есть бинарное отношение между элементами множеств $\mathscr{D}$ и $\mathscr{P}$, не объединяющееся, однако, вместе с существующими на $\mathscr{D}$ и $\mathscr{P}$ отношениями параллельности в одно действующее на $\mathscr{D} \cup \mathscr{P}$ отношение эквивалентности.

Так, например, из того, что ($D|P$ и $D|P'$) не следует, что $(P \| P')$; аналогично, ($D|P$ и $D'|P$) не влечет $(D \| D')$.

Зато из определения следует, что

$$(D \mid P,\ D \| D',\ P \| P') \Rightarrow (D' \mid P').$$

С другой стороны, для всех $x \in E$ и для любой плоскости P о б ъ е д и н е н и е прямых D, проходящих через точку x и таких, что $D|P$, есть плоскость P', параллельная плоскости P и проходящая через точку x.

Аналогично, для любой точки $x \in E$ и любой прямой D пересечение плоскостей P, проходящих через точку x и таких, что $D | P$, есть прямая D', параллельная прямой D и проходящая через точку x.

94. Следствия аксиомы размерности

Мы сразу перейдем к применению аксиомы V для определения размерности пространства E; но полученный результат не будет использован для изучения метрической структуры пространства. Таким образом, наше изучение метрической структуры будет относиться к любому аффинному пространству.

Предложение 94.1. *В случае выполнения аксиом* I, II, III *аксиома* V *эквивалентна любому из следующих утверждений:*

α. Если P, Q — две произвольные различные плоскости, то либо $P \cap Q = \emptyset$, либо $P \cap Q$ есть некоторая прямая;

β. При любом выборе точки $0 \in E$ центрированное пространство $(E, 0)$ есть векторное пространство размерности 3.

Доказательство. 1. При доказательстве эквивалентности формулировок α и β достаточно, очевидно, предположить, что плоскости P, Q проходят через выделенную точку пространства $(E, 0)$.

Обозначим через $(P \cup Q)$ векторное подпространство пространства $(E, 0)$, порождаемое плоскостями P, Q, и обозначим через $d(X)$ размерность произвольного векторного подпространства X пространства $(E, 0)$.

Известно, что

$$d(P \cup Q) + d(P \cap Q) = d(P) + d(Q) = 2 + 2 = 4. \qquad (1)$$

Покажем, что если утверждение α справедливо, то $d(E) \leqslant 3$; в противном случае в пространстве $(E, 0)$ найдется четыре линейно независимых вектора p_1, p_2, q_1, q_2; если P — плоскость, порождаемая векторами p_1, p_2, а Q — плоскость, порождаемая векторами q_1, q_2, то $d(P \cup Q) = 4$; следовательно, в соответствии с равенством (1), $d(P \cap Q) = 0$, что противоречит утверждению α.

Так как, с другой стороны, пространство E содержит по крайней мере две различные плоскости, то его размерность $\geqslant 3$, следовательно, $d(E) = 3$.

В обратную сторону: если утверждение β справедливо, то $d(P \cup Q) \leqslant 3$, откуда следует, что $d(P \cap Q) \geqslant 1$, так что P и Q либо совпадают, либо пересечение их есть прямая.

2. Из утверждения β следует аксиома V; действительно, если E имеет размерность 3, то всякая плоскость P есть множество решений уравнения $f(x) = a$, где f — линейная форма и a — некоторый скаляр; полупространства E_1, E_2 пространства E, определяемые плоскостью P, есть множества, задаваемые соответственно неравенствами $f(x) < a$ и $f(x) > a$.

3. Покажем, наконец, что из аксиомы V вытекает утверждение β или α; мы используем обозначения аксиомы V.

a) Доказательство для алгебраистов.

Можно предположить, что плоскость P проходит через 0; пусть тогда S — подпространство, дополнительное к P; положим $A_i = Q \cap E_i$ $(i = 1, 2)$.

Очевидно, что каждое из множеств E_1 и E_2 есть объединение плоскостей, параллельных плоскости P; следовательно, A_1 и A_2 — проекции полупространств E_1, E_2 на S параллельно P. С другой стороны, A_1 и A_2 образуют разбиение пространства $S \setminus \{0\}$ и

$$(x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2) \Rightarrow (0 \in [x_1,\ x_2]).$$

Отсюда сразу получаем, что S есть прямая, откуда $d(E) = 3$.

b) Элементарное доказательство, использующее только аксиомы I, II.

b_1) Пусть P — произвольная плоскость и (E_1, E_2) — разбиение пространства $(E \setminus P)$, определяемого плоскостью P. Покажем, что всякая прямая A, пересекающая плоскость P, пересекается с E_1 и E_2.

Пусть $a = A \cap P$, и пусть b будет некоторая точка прямой A, отличная от a; предположим, что $b \in E_1$ (рис 13).

Рассмотрим произвольную точку c множества E_2; если $c \in A$, утверждение доказано; в противном случае плоскость P', содержащая A и c, пересекается с плоскостью P в точке $[b, c] \cap P$, отличной от a, и, следовательно, по некоторой прямой B.

Пусть d — некоторая точка прямой A, расположенная в плоскости P' по ту же сторону от прямой B,

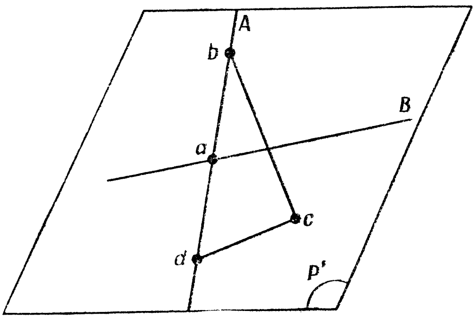

Рис. 13.

что и точка c. Так как отрезок $[c, d]$ не пересекается с прямой B, то он не пересекается и с плоскостью P, и, следовательно, $d \in E_2$.

b$_2$) Пусть теперь P, Q — две различные плоскости, такие, что $a \in P \cap Q$.

Рассмотрим две различные прямые A_1, A_2 плоскости Q, проходящие через точку a. Если хотя бы одна из них принадлежит P, то предложение доказано; в противном случае на прямой A_1 лежит точка $x_1 \in E_1$, а на прямой A_2 — точка $x_2 \in E_2$; отрезок $[x_1, x_2]$ пересекает плоскость P в точке a', отличной от a; прямая $\Delta(a, a')$ и есть искомая прямая.

Следствие 94.2. *В случае выполнения аксиомы* V *условие параллельности* $(P \| P')$ *эквивалентно условию* $(P = P'$ *или* $P \cap P' = \emptyset)$.

§3. МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА

Теперь мы переходим к выводу следствий из аксиом I, II, III, IV. Как и при изучении аффинной структуры пространства E, мы будем широко пользоваться метрической структурой плоскостей пространства E; мы столкнемся здесь с хорошо известным фактом, заключающимся в том, что большинство метрических свойств векторного пространства со скалярным произведением легко выводятся из метрических свойств его двумерных подпространств.

95. Перенос и перпендикулярность

Предложение 95.1. *Всякий перенос пространства E есть движение.*

Доказательство. Действительно, при любом переносе для всех точек $x, y \in E$ точки $x, y, f(x), f(y)$ компланарны, а известно, что в любой плоскости перенос есть движение.

Следствие 95.2. *Всякий перенос пространства E сохраняет перпендикулярность (двух пересекающихся прямых).*

Доказательство аналогично доказательству следствия 44.4.

Исходя из этого, введем новое понятие:

Определение 95.3. Говорят, что две прямые A, B пространства E (пересекающиеся или нет) *перпендикулярны*, если прямые, параллельные этим прямым и проходящие через некоторую точку a, перпендикулярны.

Это определение не зависит от выбора точки a (по предыдущему следствию).

96. Скалярное произведение

Определение 96.1 (*скалярного произведения*). В центрированном пространстве $(E, 0)$ *скалярным произведением* называется отображение $(x, y) \to x \cdot y$

множества $E \times E$ в R, определяемое следующим образом:

1. Если точки 0, x, y не принадлежат одной прямой, то $x \cdot y$ есть скалярное произведение векторов x, y центрированной плоскости $(P, 0)$, содержащей точки 0, x, y.

2. Если точки 0, x, y принадлежат одной прямой и хотя бы одна из них отлична от 0, то $x \cdot y$ есть скалярное произведение векторов x, y центрированной прямой $(D, 0)$, содержащей 0, x, y.

3. Если $x = y = 0$, то $x \cdot y = 0$.

Предложение 96.2. *В любом центрированном пространстве $(E, 0)$ отображение $(x, y) \to x \cdot y$ симметрично, билинейно и положительно определенно в том смысле, что $x^2 = x \cdot x > 0$ для всех $x \neq 0$. Кроме того, для всех x, y имеет место равенство*

$$d^2(x, y) = (x - y)^2.$$

Доказательство. Соотношения $x \cdot y = y \cdot x$, $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y)$ и $x \cdot x > 0$ при $x \neq 0$ очевидны.

Также очевидно равенство $d^2(0, x) = x^2$; таким образом, пользуясь предложением 95.1, получаем для всех x, y

$$d^2(x, y) = (x - y)^2.$$

Остается показать, что для всех x, y, z выполняется равенство

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \tag{1}$$

Но это равенство верно во всякой центрированной плоскости $(P, 0)$ и, следовательно, для любых x, y, z, компланарных с точкой 0. В частности, для любых b, c

$$(b + c)^2 = b \cdot (b + c) + c \cdot (b + c) = b^2 + 2b \cdot c + c^2.$$

В общем случае для доказательства равенства (1) положим

$$m = \frac{1}{2}(y + z) = \text{середина пары } (y, z)$$

(рис. 14).

Каждая из троек точек $(0, y, z)$ и (x, y, z) лежит в плоскости, следовательно (формула медианы):

$$y^2 + z^2 = 2m^2 + 2(m - y)^2,$$

$$(y - x)^2 + (z - x)^2 = 2(m - x)^2 + 2(m - y)^2.$$

Почленным вычитанием получаем

$$2x \cdot y + 2x \cdot z = 4x \cdot m = 2x \cdot (y + z),$$

откуда следует искомое соотношение.

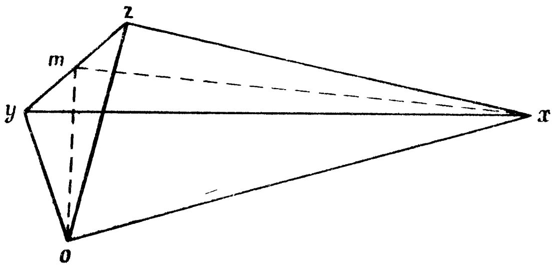

Рис. 14.

Произведение $x \cdot y$ обладает, следовательно, всеми свойствами скалярного произведения со всеми вытекающими отсюда следствиями, рассмотренными в гл. III.

Резюме: аксиомы I, II, III, IV дали нам возможность доказать следующий результат:

Теорема 96.3. *При любом выборе точки* $0 \in E$ *можно единственным образом задать в пространстве* E *структуру векторного пространства с началом* 0, *снабженного скалярным произведением; одномерные и двумерные аффинные многообразия этого пространства будут прямыми и плоскостями пространства* E; *расстояние, порождаемое скалярным произведением, совпадает с расстоянием, заданным на* E.

97. Приложение к двум классическим теоремам

Как было показано, большинство обычно изучаемых геометрических свойств пространства могут быть легко доказаны в том случае, если имеется возможность воспользоваться алгебраическими методами. Тому примером два следующих предложения.

1. Будем говорить, что **прямая** D **перпендикулярна плоскости** P (обозначается $D \perp P$), если D перпендикулярна всякой прямой плоскости P.

Предложение 97.1 (**теорема о двух перпендикулярах**). *Пусть A, B — две непараллельные прямые плоскости P и D — некоторая прямая. Тогда*

$$(D \perp A \text{ и } D \perp B) \Rightarrow (D \perp P).$$

Доказательство. Применив перенос, сведем задачу к тому случаю, когда P, A, B, D проходят через начало координат. Рассмотрим теперь точки

$$a \in A,\ b \in B,\ d \in D, \text{ такие, что } a,\ b,\ d \neq 0.$$

Любая точка $x \in P$ представима в виде $x = \lambda a + \mu b$. Но в центрированном пространстве $(E, 0)$ по предположению имеем

$$d \cdot a = 0 \quad \text{и} \quad d \cdot b = 0;$$

следовательно, $d \cdot x = d \cdot (\lambda a + \mu b) = \lambda (d \cdot a) + \mu (d \cdot b) = 0$.

Отсюда вытекает, что $D \perp P$.

2. Одним из классических результатов является и **теорема о трех перпендикулярах**. Малая доза алгебры позволит свести доказательство ее к очевидному соотношению.

Мы полагаем известным определение проекции точки x на плоскость или прямую (след перпендикуляра к этой плоскости или прямой, проходящего через точку x; проекция соответствует минимуму расстояния).

Предложение 97.2. *Рассмотрим некоторую плоскость $P \subset E$, прямую $D \subset P$ и точку $a \in E$. Пусть p — проекция точки a на плоскость P.*

Тогда проекции точек p и a на прямую D совпадают (рис. 15).

Доказательство. Для любых $x \in D$ имеем

$$d^2(a, x) = d^2(a, p) + d^2(p, x).$$

Следовательно, $d(a, x)$ принимает минимальное значение вместе с $d(p, x)$, откуда следует, что проекции совпадают.

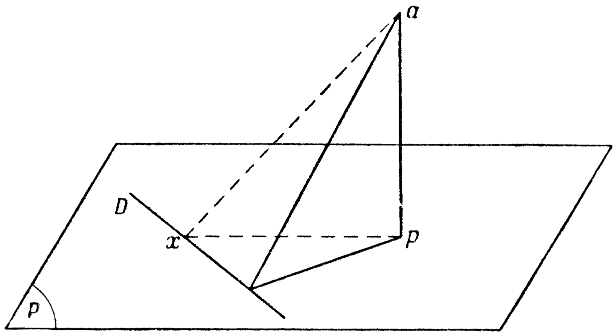

Рис. 15.

В этой упрощенной форме теоремы о трех перпендикулярах просматривается простой способ обобщить ее на тот случай, когда E — произвольное конечномерное пространство, P — некоторое аффинное подпространство пространства E, и D — некоторое аффинное подпространство пространства P. В еще более общем случае можно заменить D на произвольное замкнутое подпространство пространства P.

98. Темы для дальнейшего изучения

Мы завершим изложение стереометрии, указав некоторые направления дальнейшего изучения, которые легко включаются в курс обучения благодаря тем алгебраическим методам, которые имеются теперь в нашем распоряжении.

1. *Аффинная структура.* Изучение аффинных преобразований пространства E (в частности, группы преобразований подобия), косых проекций, линейных форм.

Изучение выпуклых множеств.

Конусы и цилиндры (в связи с группой гомотетий с центром в точке 0 и группой переносов).

2. *Метрическая структура*

Ортогональная проекция (она минимизирует расстояния).

Симметрия относительно плоскости, прямой, точки.

Движения пространства; вращения вокруг некоторой оси; множества, устойчивые относительно некоторых групп движений или преобразований подобия; конусы, цилиндры, сферы.

Упражнения к главе IX

1. Пусть (D_i) — произвольное семейство прямых, такое, что любые две из этих прямых пересекаются.

Показать, что либо все эти прямые проходят через одну точку, либо все они принадлежат одной плоскости.

2. Как изменится это заключение, если известно только, что любые две из этих прямых компланарны?

3. Пусть P, P' — две различные плоскости и (a_i) $(i = 1, 2, 3)$ (соответственно (a'_i)) — тройка попарно различных точек плоскости P (соответственно P').

Показать, что если каждая прямая $\Delta(a_i, a_j)$ (где $i \neq j$) пересекает прямую $\Delta(a'_i, a'_j)$, то прямые $\Delta(a_i, a'_i)$, если они определены, параллельны или совпадают, и тройка точек $\Delta(a_i, a_j) \cap \Delta(a'_i, a'_j)$ принадлежит одной прямой.

4. Пусть A_1, A_2, A_3 — три плоскости и a_1, a_2, a_3 — три точки трехмерного пространства E.

Каково множество гомотетий f, таких, что

$$f(a_i) \in A_i \qquad (i = 1, 2, 3)?$$

5. Пусть D — некоторая прямая векторного пространства E, X — подмножество пространства E и k — некоторое отличное от 0 число.

Каким будет множество центров гомотетий f с коэффициентом k, таких, что $x(D)$ пересекается с X?

Тот же вопрос, если заменить прямую D на плоскость P; на любое подмножество Y пространства E.

6. Перенести упр. 3 и 4 к гл. IV на случай пространства сначала без изменений, а затем заменив прямые на плоскости.

7. Пусть E — трехмерное пространство, D — прямая этого пространства и точка $0 \in E$.

Найти подмножества пространства E, устойчивые одновременно относительно вращений вокруг прямой D и относительно положительных гомотетий с центром в точке 0.

Рассмотреть отдельно случаи $0 \in D$ и $0 \notin D$.

Та же задача при замене гомотетий с центром в точке 0 на переносы в направлении δ.

8. Пусть D — прямая в пространстве; *винтовым перемещением* с осью D называется всякое произведение f переносов в направлении прямой D и четного числа симметрий относительно плоскостей, содержащих D.

Показать, что множество таких f есть группа, изоморфная группе-произведению $T \times R$.

9. Пусть f, g — два винтовых перемещения с осями A, B. Показать, что $f \circ g$ и $g \circ f$ — винтовые перемещения, оси которых симметричны относительно общего перпендикуляра к прямым A, B.

10. Рассмотрим в пространстве E произвольную пару (A, B) лучей с общим началом; арифметической мерой пары (A, B) (в радианах) называется арифметическая мера $p(A, B)$ угла $\widehat{AB}$ в плоскости, содержащей A и B (если эта плоскость определена не единственным образом, то арифметическая мера, очевидно, равна 0 или π).

Показать, что если (A, B) и (A', B') — две произвольные пары, то равенство $p(A, B) = p(A', B')$ выполняется тогда и только тогда, когда существует движение пространства E, переводящее (A, B) в (A', B'); показать, что среди таких движений всегда найдется собственное движение и зеркальное движение.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

АКСИОМАТИКА НА МЕТРИЧЕСКОЙ ОСНОВЕ

Аксиоматика, которую я изложил в предыдущих главах, в основе своей векторная; метрика появляется только после того, как векторная структура плоскости установлена и исследована.

Некоторые преподаватели считают, что метрические понятия интуитивно понятней и легче усваиваются детьми, чем векторные понятия. Фактически еще не было случая, чтобы школьникам преподавали регулярный курс, в основу которого было положено понятие вектора, а только продолжительная экспериментальная проверка различных методов дает возможность прийти к какому-то выводу.

Тем не менее может оказаться предпочтительнее начать изложение геометрии с метрических понятий; поэтому я предлагаю здесь некоторый вариант [1]) первой аксиоматики, основанный на «аксиоме складывания», которая является математической формулировкой, описывающей физическую операцию сгибания листа бумаги по некоторой прямой.

99. Первые аксиомы

Аксиомы снова распадаются на четыре группы:

Аксиомы I′ и II′ совпадают с аксиомами I и II гл. I.

---

[1]) Эта аксиоматика — сильно переделанный вариант аксиоматики, предложенной автором ранее (см. [24]).

Полученное здесь упрощение есть следствие введения связанной с параллельностью аксиомы инцидентности I_b и такого изменения содержащей неравенство треугольника аксиомы, чтобы в ней фигурировало строгое неравенство. Кроме того, в нашей новой аксиоматике удалось избежать недостатков типа определения прямых как множеств, изометричных некоторой фиксированной прямой.

Аксиома III′ содержит аксиому $\mathrm{III_a}$ гл. II, дополненную неравенством треугольника; предполагается, казалось бы, что известно определение поля R; фактически же, как видно из нижеследующего изложения, можно получить многие результаты, пользуясь только структурой аддитивной линейно упорядоченной группы поля R.

Аксиома III′. *С плоскостью* П *ассоциировано отображение* d *множества* $\Pi \times \Pi$ *в множество* R_+, *называемое расстоянием, такое, что:*

1. $d(y, x) = d(x, y)$ *для всех* $x, y \in \Pi$;
2. *Для каждой ориентированной прямой* D, *любого* $x \in D$ *и произвольного числа* $l \geqslant 0$ *найдется единственная точка* $y \in D$, *такая, что* $x \leqslant y$ *и* $d(x, y) = l$;
3. $(x \in [a, b]) \Rightarrow (d(a, x) + d(x, b) = d(a, b))$;
4. *Пусть* $\{a, x, b\}$ — *произвольная тройка точек, не принадлежащих одной прямой. Тогда*

$$d(a, b) < d(a, x) + d(x, b)$$

(строгое неравенство треугольника).

Прямые следствия аксиом I′, II′, III′.

1. Очевидно мы опять получим следствия из аксиомы $\mathrm{III_a}$, объединенные в предложении 9.1, которое позволяет отождествить всякую центрированную ориентированную прямую с числовой прямой R.

2. Для любых трех точек a, x, b плоскости П

$$d(a, b) \leqslant d(a, x) + d(x, b).$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$x \in [a, b].$$

3. Пусть $X \subset \Pi$ и f — отображение множества X в П; говорят, что f есть *движение*, если

$$(a, b \in X) \Rightarrow (d(a, b) = d(f(a), f(b))).$$

Из приведенного выше замечания 2 следует, что всякое движение сохраняет коллинеарность и отношение «между».

Отсюда следует, что каждое движение переводит любой отрезок в отрезок и любую прямую в прямую, две параллельные прямые в две параллельные прямые и полуплоскости в полуплоскости. Всякое движение плоскости П, переводящее ее в себя, отображает П на себя и является изоморфизмом относительно структуры, задаваемой аксиомами I′, II′, III′.

Упражнение. Пусть A_1, A_2 — две выпуклые замкнутые фигуры на плоскости, ограниченные многоугольниками, такие, что $A_1 \subset A_2$.

Показать, что если l_1 и l_2 — длины границ фигур A_1, A_2, то $l_1 \leqslant l_2$, причем равенство имеет место лишь в случае $A_1 = A_2$.

Благодаря этому свойству можно легко дать определение длины границы замкнутого выпуклого множества.

100. Аксиома складывания (или симметрии)

Для удобства изложения последней аксиомы обозначим через $\Pi_1(D)$ и $\Pi_2(D)$ открытые полуплоскости, определяемые прямой D; складыванием по прямой D называется любое движение φ, отображающее $D \cup \Pi_1(D)$ на множество $D \cup \Pi_2(D)$, такое, что для любого $x \in D$ мы имеем $\varphi(x) = x$.

Аксиома IV′. *Для любой прямой D существует по крайней мере одно складывание по прямой D.*

Мы докажем единственность складывания по прямой D; она не постулируется, так как доказательство чрезвычайно просто.

101. Симметрия относительно прямой

Лемма 101.1. *Для любой прямой D существует только одно складывание по этой прямой.*

Пусть $\Pi_1(D)$ и $\Pi_2(D)$ — открытые полуплоскости, определяемые прямой D, φ — некоторое складывание по этой прямой и $a \in \Pi_1(D)$; положим $a' = \varphi(a)$. Отрезок $[a, a']$ пересекается с прямой D в точке p; всякая точка x прямой D, отличная от p, лежит вне отрезка $[a, a']$, следовательно,

$$d(a, a') < d(a, x) + d(x, a') = 2d(a, x).$$

Но $d(a, a') = 2d(a, p)$; отсюда следует, что

$$d(a, p) < d(a, x).$$

Точка p обладает той характерной особенностью, не зависящей от выбора отображения φ, что она является ближайшей к a точкой прямой D; говорят, что p есть ортогональная проекция, или, короче, проекция точки a на D. Эта проекция есть середина пары (a, a'); следовательно, точка a', симметричная точке a относительно p на прямой, содержащей a и p, не зависит от φ, т. е. φ единственно.

Обозначим теперь через $\hat{\varphi}$ продолжение φ на Π, определяемое следующим образом:

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) \quad \text{для всех} \quad x \in D \cup \Pi_1(D);$$

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi^{-1}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Pi_2(D).$$

Лемма 101.2. *Продолжение $\hat{\varphi}$ отображения φ есть движение плоскости Π, отображающее ее на себя.* (Это движение естественно назвать симметрией относительно прямой D.)

Прежде всего сразу получаем, что $\hat{\varphi}$ есть отображение плоскости Π на себя.

Затем рассмотрим $a, b \in \Pi$.

Если $a, b \in D \cup \Pi_1(D)$, то имеем

$$d(\hat{\varphi}(a), \hat{\varphi}(b)) = d(a, b),$$

так как $\hat{\varphi} = \varphi$ на $\{a, b\}$.

К тому же заключению мы придем и в том случае, если $a, b \in D \cup \Pi_2(D)$.

Предположим теперь, что $a \in \Pi_1(D)$ и $b \in \Pi_2(D)$; пусть $x = D \cap [a, b]$; положим

$$a' = \hat{\varphi}(a); \quad b' = \hat{\varphi}(b).$$

Имеем

$$d(x, a) = d(x, a'); \quad d(x, b) = d(x, b').$$

Таким образом,

$$d(a',\ b') \leqslant d(a',\ x) + d(x,\ b') = \\ = d(a,\ x) + d(x,\ b) = d(a,\ b).$$

Иначе говоря, $d(a', b') \leqslant d(a, b)$.

Но аналогичным образом получаем и неравенство $d(a, b) \leqslant d(a', b')$, откуда следует искомое равенство

$$d(a,\ b) = d(a',\ b').$$

102. Перпендикуляр и проекция

Определение 102.1. Говорят, что некоторая *прямая D' перпендикулярна прямой D* (записывается $D' \perp D$), если $D' \neq D$ и прямая D' совпадает с прямой, симметричной ей относительно прямой D.

Как видно из леммы 102.4 ниже, это отношение симметрично. Непосредственно из определения следует, что через любую точку $x \in D$ проходит перпендикуляр к прямой D, и притом только один, а именно, прямая, соединяющая точку x с точкой, симметричной ей относительно прямой D.

Лемма 102.2. 1. *Если $D' \perp D$, то эти прямые пересекаются.*

2. *Если D и D' — две прямые, пересекающиеся в точке p, то*

$(D' \perp D) \Leftrightarrow$ (*каждая точка прямой D' проектируется в точку p прямой D*) $\Leftrightarrow$ (*существует отличная от p точка прямой D', которая проектируется в точку p прямой D*).

Доказательство. 1. Прямая D' содержит по крайней мере две различные точки x_1 и x_2, симметричные относительно прямой D; следовательно, $[x_1, x_2]$ пересекается с D.

2. Предположим, что $D' \perp D$ и $x \in D'$. Точка x' симметричная точке x относительно прямой D, лежит на D'; значит, точка $D \cap [x, x']$, т. е. проекция точки x на прямую D, есть именно точка p.

И наоборот, пусть D и D' пересекаются в точке p, и пусть x — некоторая точка прямой D', отличная от p и такая, что ее проекция на D есть p; рассмотрим точку x', симметричную точке x относительно D. Отрезок $[x, x']$ пересекает D в точке p. Следовательно, прямая D', содержащая различные точки x, p, содержит также точку x', откуда следует, что $D' \perp D$.

Следствие 102.3. *Пусть $D' \perp D$, и пусть f — движение множества $D' \cup D$. Тогда $f(D') \perp f(D)$.*

Это следует из того факта, что, как видно из предыдущей леммы, перпендикулярность выразима в терминах расстояний.

Лемма 102.4. *Если $D' \perp D$, то и $D \perp D'$.*

Доказательство. Предположим, что $D' \perp D$ и что p — точка их пересечения. Рассмотрим некоторую точку $x \in D$: для любой точки $x' \in D'$, отличной от p, выполняется равенство

$$d(x, x') = d(x, x''),$$

где x'' — точка, симметричная точке x' относительно прямой D.

Следовательно, x' не может быть проекцией точки x на D' (единственность минимума); значит, такой проекцией будет точка p, откуда получаем, что $D \perp D'$ по лемме 102.2.

Лемма 102.5. *Пусть $D \perp D'$. Тогда*

$$(D \perp D'') \Leftrightarrow (D' \parallel D'').$$

Доказательство. 1. Пусть $D \perp D'$ и $D' \parallel D''$.

Прямые D, D'' пересекаются в некоторой точке p. Прямые D' и D''_1, симметричные параллельным прямым D' и D'' относительно прямой D, параллельны (следствие 3 аксиомы III'); следовательно, D'' и D''_1 параллельны и проходят через p.

Отсюда следует, что $D'' = D''_1$ и, наконец, $D \perp D''$.

2. Пусть $D \perp D'$ и $D \perp D''$.

Рассмотрим точку x прямой D'', не лежащую на D. Как мы видели, прямая, параллельная прямой D' и проходящая через x, перпендикулярна D; следовательно, она совпадает с прямой D' вследствие единственности перпендикуляра к прямой D, проведенного через точку, не лежащую на D. Иначе говоря, $D' \parallel D''$.

102.6. *Следствия*

Пусть δ_1, δ_2 — два направления; будем говорить, что они перпендикулярны, если существуют две перпендикулярные прямые направлений δ_1, δ_2. Из лемм **102.4** и 102.5 следует, что:

1. Это отношение симметрично, антирефлексивно ($\delta \perp \delta$ никогда не имеет места), и каждому направлению соответствует перпендикулярное ему направление, и притом только одно.

2. Для того чтобы две прямые были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их направления были перпендикулярны.

Замечание. Отсюда следует, что отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in \Pi$ ее ортогональную проекцию на некоторую прямую D, есть не что иное как косая проекция на D параллельно направлению, перпендикулярному прямой D.

Определение 102.7. Пусть a, b — две различные точки, 0 — середина этой пары.

Медиатрисой пары (a, b) называется перпендикуляр к прямой $\Delta(a, b)$, проведенный через точку 0.

Лемма 102.8. *Пусть a, b — две различные точки и D — их медиатриса.*

Обозначим через Π_a, Π_b открытые полуплоскости, определяемые прямой D и содержащие соответственно точки a и b. Тогда

$$(x \in D) \Rightarrow (d(x, a) = d(x, b));$$
$$(x \in \Pi_a) \Rightarrow (d(x, a) < d(x, b));$$
$$(x \in \Pi_b) \Rightarrow (d(x, b) < d(x, a)).$$

Доказательство. Так как a и b симметричны относительно D, то

$$(x \in D) \Rightarrow (d(x, a) = d(x, b)).$$

Если $x \in \Pi_a$, то пусть $y = D \cap [x, b]$; так как $y \notin [a, x]$ (выпуклость множества Π_a), то

$$d(x, a) < d(x, y) + d(y, a) = d(x, y) + d(y, b) = d(x, b).$$

Рассуждения останутся теми же в случае $x \in \Pi_b$.

Следствие 102.9. $(x \in D) \Leftrightarrow (d(x, a) = d(x, b))$.

Следствие 102.10 (сравнение наклонных). *Пусть p — проекция точки x на прямую, проходящую через точки a и b.*

Отношение порядка, связывающее $d(p,a)$ и $d(p, b)$, совпадает с отношением порядка, связывающим $d(x, a)$ и $d(x, b)$.

Доказательство. Действительно, в зависимости от того, равна нулю, строго меньше или строго больше нуля величина $d(p, a) - d(p, b)$, точка x принадлежит либо D, либо Π_a, либо Π_b.

Этот же результат можно сформулировать так:

Длина наклонной есть строго возрастающая функция длины ее проекции.

Точное количественное выражение этот результат находит в теореме Пифагора.

Следствие 102.11. *Пусть $(0, a, b)$ — треугольник, для которого $d(0, a) = d(0, b)$ и $a \neq b$. Проекция точки 0 на прямую, проходящую через точки a, b, есть середина пары (a, b).*

Этот простой, но очень важный результат вытекает из следствия 102.10; он может быть выражен также следующим образом:

В равнобедренном треугольнике, равные стороны которого исходят из вершины 0, высота, опущенная из 0, есть ось симметрии треугольника.

103. Симметрия относительно точки и произведение симметрий

Определение 103.1. *Симметрией относительно некоторой точки* 0 плоскости П называется отображение f плоскости П на себя, определяемое следующим образом:

$f(0)=0$ и $f(x)=x'$ при $x \neq 0$, где x' — такая точка прямой $\Delta(0,x)$, что 0 есть середина пары $(x, f(x))$.

Непосредственно из определения следует, что f^2 — тождественное преобразование и что $f(D)=D$ для всякой прямой D, проходящей через точку 0.

Теорема 103.2. *Симметрия относительно точки* 0 *совпадает с произведением симметрий относительно двух произвольных перпендикулярных прямых, проходящих через точку* 0.

Доказательство. Пусть D_1, D_2 — две перпендикулярные прямые, проходящие через 0. Рассмотрим $x \notin D_1 \cup D_2$.

Обозначим через Δ_1, Δ_2 прямые, параллельные соответственно D_1 и D_2 и проходящие через x, и пусть Δ_i' — прямая, симметричная прямой Δ_i относительно прямой D_i $(i=1, 2)$; очевидно, что Δ_i' параллельна Δ_i $(i=1, 2)$.

Прямоугольник, образованный двумя парами параллельных прямых Δ_1, Δ_1' и Δ_2, Δ_2', симметричен относительно прямых D_1, D_2; следовательно, симметричны и обе его диагонали; поэтому они пересекаются в точке, принадлежащей обеим прямым D_1 и D_2, т. е. в точке 0, и делятся этой точкой пополам. Отсюда вытекает, что точка, симметричная точке x относительно 0, есть вершина этого прямоугольника, противолежащая вершине x, а именно в эту точку переходит точка x в результате последовательного применения симметрий относительно прямых D_1 и D_2.

Если же $x \in D_1 \cup D_2$, то доказательство очевидно.

Следствие 103.3. *Симметрия относительно точки есть движение. Она переводит всякую прямую в прямую, ей параллельную.*

(Рассмотреть случай, когда D проходит через 0, затем общий случай.)

Приложение 103.4. Назовем *параллелограммом* такой четырехугольник (a, b, a', b'), что обе пары его противолежащих вершин (a, a') и (b, b') имеют общую середину.

Из предыдущего следствия вытекает, что четырехугольник (a, b, a', b'), не принадлежащий одной прямой, будет параллелограммом тогда и только тогда, когда его вершины попарно различны и

$$D(a, b) \parallel D(a', b'); \quad D(a, b') \parallel D(a', b).$$

С другой стороны, во всяком параллелограмме общая середина диагоналей будет его центром симметрии, откуда следует, что в параллелограмме противоположные стороны равны.

Лемма 103.5. *Пусть D, D', A — три параллельные прямые.*

1. *Если D' и D симметричны относительно прямой A, то всякая секущая пересекает эти три прямые в таких точках x, x', a, что точка a есть середина пары (x, x').*

2. *Обратно, если существует секущая, обладающая указанным свойством, то D' и D симметричны относительно A.*

Доказательство.

1. Пусть D, D' симметричны относительно A, и пусть x, x', a — точки пересечения этих трех прямых с некоторой секущей. Рассмотрим перпендикуляр B к прямой A, проведенный через точку a. Произведение симметрии относительно A и симметрии относительно B переводит D в D'; следовательно, по теореме 103.2 эти прямые симметричны относительно точки a, и, значит, эта точка — середина пары (x, x').

2. Если a — середина пары (x, x'), то D симметрична D' относительно точки a. По теореме 103.2 и следствию из нее прямая, симметричная прямой D

относительно A, совпадает с прямой, симметричной прямой D относительно точки a, т. е. с прямой D'.

Теорема 103.6 (слабая форма теоремы Фалеса*)). *Если секущая пересекает три параллельные прямые D, D', A в трех таких точках x, x', a, что a — середина пары (x, x'), то при пересечении с любой другой секущей этой тройки прямых точки пересечения будут обладать тем же свойством* (другими словами, *D и D' симметричны относительно любой точки прямой A*).

Это следует непосредственно из леммы 103.5.

Следствие 103.7. *Для любого целого $n \geqslant 2$ всякий отрезок может быть разбит* (*и притом единственным образом*) *на n последовательных равных друг другу отрезков.*

(Классическое построение, использующее параллельные, проходящие через последовательность точек, расположенных на вспомогательной прямой так, что расстояние между любыми двумя соседними из них одинаковы.)

Это следствие, очевидно, интересно только в том случае, когда предполагаются известными лишь немногие свойства поля R, например, если предполагается только, что R — линейно упорядоченная коммутативная группа.

104. Схема изложения дополнительного материала

В теореме 103.6 формулируется то же свойство, что и в аксиоме $\mathrm{III_b}$; таким образом, мы располагаем теперь аксиомами I, II, III и можем строить аффинную геометрию так, как это сделано в гл. II.

С другой стороны, определение 102.1 вводит в рассмотрение отношение перпендикулярности, а из лемм 102.2, 4, 5 следует, что это отношение удовлетворяет аксиоме $\mathrm{IV_a}$; поэтому можно определить

*) Теоремой Фалеса во французской методической литературе принято называть теорему, трактующую о свойствах угла, пересеченного параллельными прямыми.

коэффициент проекции двух лучей с общим началом подобно тому, как это было сделано в п. 33; для этого коэффициента проекции выполняется аксиома $\mathrm{IV_b}$:

Действительно, если лучи A_1 и A_2 с началом 0 принадлежат одной прямой, то равенство $c(A_1, A_2) = c(A_2, A_1)$ очевидно; если же они не принадлежат одной прямой, то пусть $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$ таковы, что $d(0, a_1) = d(0, a_2) \neq 0$; медиатриса D пары (a_1, a_2) проходит через 0; следовательно, осевая симметрия с осью D меняет местами A_1 и A_2; так как эта осевая симметрия — движение и, значит, сохраняет перпендикулярность, получаем, что $c(A_1, A_2) = c(A_2, A_1)$.

Таким образом, все аксиомы I, II, III, IV выполнены, и далее можно идти по тому же пути, что и в предыдущем изложении.

Если желательно излагать метрические понятия до изучения векторных понятий, то нужно доказать теорему Пифагора, не обращаясь к скалярному произведению. Приводим простое доказательство этой теоремы, для которого не требуется предварительного изучения ни подобия треугольников, ни углов в треугольнике:

Пусть D, D' — два луча с общим началом 0; пусть $x \in D$ и k — коэффициент проекции этих лучей.

Рассмотрим проекцию x' точки x на прямую, несущую D', и проекцию x'' точки x' на прямую, несущую D; очевидно, что $\overline{0x''} = k^2\overline{0x}$, откуда следует, что $x'' \in D$.

Рассмотрим теперь треугольник (a, b, c) с прямым углом в вершине a; обозначим в этом треугольнике через p проекцию точки a на прямую $\Delta(b, c)$, через α, β, γ — длины сторон и через k, k' — коэффициенты проекции пар лучей, определяемых точками b и c соответственно.

Из вышеизложенного следует, что $p \in [b, c]$, откуда

$$\alpha = k^2\alpha + k'^2\alpha \quad \text{или} \quad \alpha^2 = k^2\alpha^2 + k'^2\alpha^2,$$

что, наконец, может быть записано в виде

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Отсюда следует, в частности, что $|k|$, $|k'| \leqslant 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

АКСИОМАТИКА НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Я думаю, что не стоит обсуждать с учениками, какие изменения могут быть внесены в предлагаемую им систему аксиом, прежде чем они ее хорошо усвоят и пока у них не появится некоторая зрелость мысли. К тому же, евклидовой геометрии свойственна такая простота, и структура ее содержит в зародыше столь много фундаментальных понятий, — понятия группы, вектора, скалярного произведения, — что изучение ее не должно страдать от конкуренции с другими геометриями.

Однако в конце средней школы или в начале университетского курса, когда в распоряжении ученика уже имеется достаточно алгебраических средств, очень интересно предложить ему исследование моделей тех или иных неевклидовых геометрий и показать ему, как те или иные изменения в аксиомах евклидовой плоскости и пространства приводят к аксиомам этих геометрий.

Я укажу здесь коротко аксиомы «абсолютной» геометрии плоскости, характеризующие и плоскость Евклида, и плоскость Лобачевского.

Здесь также плоскость есть некоторое множество Π, а прямые — его подмножества. Аксиомы разбиваются на четыре группы:

I″. *Для всякой пары* (x, y) *различных точек плоскости* Π *существует прямая, и притом единственная, содержащая эти точки* x, y.

II″. *На всякой прямой* D *определены две структуры линейного порядка, противоположные друг другу.*

III″. (*Эта аксиома совпадает с аксиомой* III′ *приложения* 1.)

IV″. (Аксиома складывания.) *Для всякой прямой D существует разбиение множества* $(\Pi \setminus D)$ *на два непустых подмножества* Π_1 *и* Π_2, *таких, что:*

1. $(x_1 \in \Pi_1;\ x_2 \in \Pi_2) \Rightarrow ([x_1, x_2] \cap D$ *не пусто*).

2. *Существует такое движение* f, *отображающее множество* $\Pi_1 \cup D$ *на множество* $\Pi_2 \cup D$, *что* $f(x) = x$ *для всех* $x \in D$.

Единственность разбиения плоскости Π на две полуплоскости, определяемые некоторой прямой, доказывается сразу[1]), равно как и единственность соответствующего складывания. Отсюда получается понятие симметрии относительно прямой; такая симметрия есть движение плоскости Π.

Пользуясь этими симметриями, можно рассмотреть перпендикулярность; ими же порождаются движения плоскости Π. Как и в евклидовой плоскости, собственные движения (произведения четного числа симметрий) образуют группу, действующую однотранзитивным образом на множестве замкнутых лучей.

Для любой прямой D и любой точки $x \notin D$ через x проходит по крайней мере одна прямая, параллельная D; если найдется пара (D_0, x_0), для которой эта прямая единственна, то и для всех пар (D, x) можно доказать единственность параллельной; в этом случае плоскость Π евклидова; в противном случае Π будет (гиперболической) плоскостью Лобачевского.

[1]) Доказательства первых теорем были даны в моей статье [24].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

АКСИОМАТИКА «НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ»

«Начальной геометрией» (la petite géométrie) мы называем геометрию, преподаваемую школьникам до 14 лет, когда еще противопоказано явное употребление языка векторов и когда отрезки можно делить лишь в рациональном, а не в произвольном отношении. Для учащихся этого возраста геометрия не строится как последовательно дедуктивная наука; лишь некоторые простые теоремы предлагается доказывать, причем за исходные берутся посылки, приемлемые для ученика вследствие их интуитивного характера; эти посылки образуют аксиомы маленьких дедуктивных островков («фрагментов геометрии»), возникающих при таком подходе.

Чрезвычайно важно, чтобы определения и язык, употребляемые на этой стадии обучения, были бы именно теми определениями и тем языком, которые позже будут использоваться систематически.

В равной степени желательно, чтобы некоторая общая идея могла служить направляющей нитью при выборе дедуктивных фрагментов; я полагаю, что такой основной нитью могла бы стать аксиоматика с сильными аксиомами, в которых, однако, используются только простые понятия, такие, как понятия конгруэнтности.

Изучение аффинных понятий

Первыми двумя аксиомами будут аксиомы I и II, но аксиома II формулируется в терминах отношения «между» (см. Хальстед [3]).

Аксиома $\mathrm{III_a}$ заменяется следующей:

$\mathrm{III_a'''}$. *В множестве* $\Pi \times \Pi$ *пар точек плоскости* Π *определено отношение эквивалентности, обозначаемое через* $\sim$ *и такое, что*:

1. *Для всех* x, y

$$(x, y) \sim (y, x).$$

2. *Для любой прямой* D *и любых* x, y, $x' \in D$ *с каждой стороны от точки* x' *существует единственная точка* y' *прямой* D, *такая, что* $(x, y) \sim (x', y')$.

3. *Для всякой прямой* D *и всех* x, y, z, x', y', $z' \in D$, *таких, что* $x \leqslant y \leqslant z$ *и* $x' \leqslant y' \leqslant z'$,

$$[(x, y) \sim (x', y') \text{ и } (y, z) \sim (y', z')] \Rightarrow [(x, z) \sim (x', z')].$$

Аксиома $\mathrm{III_b}$ остается без изменений.

Классы эквивалентности по отношению $\sim$ называются *расстояниями*, их можно сравнивать между собой и складывать друг с другом.

Эти аксиомы позволяют доказать[1]) теорему 12.3 и даже показать, что плоскость Π с некоторой начальной точкой есть векторное пространство над Q. Следовательно, из этих аксиом можно будет вывести все классические результаты элементарного характера, касающиеся аффинной структуры плоскости.

Изучение метрических понятий

К предыдущим аксиомам добавляются:

либо неравенство треугольника $\mathrm{III_4'}$ и аксиома складывания $\mathrm{IV'}$, либо аксиома $\mathrm{IV_a}$ и следующая аксиома, более сильная, чем $\mathrm{IV_b}$:

$\mathrm{IV_b'''}$. *Пусть* $(0, x, y)$ — *произвольная тройка точек, принадлежащих одной прямой и* h — *проекция точки* 0 *на прямую* $\Delta(x, y)$. *Тогда*

$$[d(h, x) = d(h, y)] \Leftrightarrow [d(0, x) = d(0, y)].$$

[1]) Аксиома II для этого также неудобна. В общем случае, предположим, что выполняется аксиома I, и предположим, что на каждой прямой Δ плоскости Π однотранзитивным образом действует некоторая коммутативная группа $G(\Delta)$, каждый отличный от 0 элемент которой имеет бесконечный порядок (это дает возможность ввести определение середины). Тогда можно сформулировать аксиому $\mathrm{III_b}$ и доказать теорему 12.3, а также тот факт, что плоскость Π с выбранным началом есть векторное пространство над Q.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

СХЕМА ЕЩЕ ОДНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛА

В гл. V было дано определение угла, использующее группу вращений вокруг точки.

Я предлагаю здесь еще один способ, при котором сохраняется более тесная связь с парами лучей; этот способ состоит в задании некоторого отношения эквивалентности на множестве пар лучей с общим началом 0; при этом множество углов будет образовано классами эквивалентности по этому отношению; затем дается определение суммы двух углов. Этот метод очень напоминает введение свободных векторов с помощью «связанных векторов» *); аналогия здесь настолько сильна, что оба построения могут преподноситься по одной схеме; я ограничусь тем, что приведу здесь эту схему, предоставив читателю удовольствие перевести ее на язык векторов или на язык углов.

В первом случае множество E, которым мы будем пользоваться, есть Π, а множество $\mathcal{S}$ — множество центральных симметрий плоскости Π; во втором случае E — окружность с центром в точке 0 и $\mathcal{S}$ — множество осевых симметрий, оси которых проходят через 0.

---

*) Имеется в виду обычный переход от «связанных векторов» (направленных отрезков) к «свободным векторам» (которые обычно и обозначаются словом «вектор» без всякого прилагательного) — к классам эквивалентности «связанных векторов» по отношению эквивалентности:

$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, если пары A, D и B, C имеют общую середину (ср. стр. 40).

Абстрактная схема

Пусть E — некоторое множество, на котором задано множество $\mathscr{S}$ подстановок (множества E), так, что:

1. Для любых $\sigma \in \mathscr{S}$ элемент σ^2 — тождественная подстановка.

2. Для любых x, $y \in E$ найдется единственное $\sigma \in \mathscr{S}$, меняющее местами x и y.

3. Пусть всякое произведение вида $\rho \cdot \sigma$ $(\rho, \sigma \in \mathscr{S})$ называется *переносом*; тогда будем предполагать, что два переноса, совпадающие для некоторого $x \in E$, совпадают тождественно.

Лемма α. *Всякое произведение* $\rho \cdot \sigma \cdot \tau$ *элементов множества* $\mathscr{S}$ *принадлежит этому множеству.*

Действительно, пусть $a \in E$, и пусть $a' = \rho \cdot \sigma \cdot \tau(a)$; рассмотрим элемент π множества $\mathscr{S}$, меняющий местами a и a'.

Равенство $\rho \cdot \sigma \cdot \tau(a) = \pi(a)$ влечет равенство $\sigma \cdot \tau(a) = \rho \cdot \pi(a)$, откуда получаем $\sigma \cdot \tau = \rho \cdot \pi$ и $\rho \cdot \sigma \cdot \tau = \pi$.

Следствие [1]). *Для всех* ρ, σ, $\tau \in \mathscr{S}$ *элемент* $(\rho \cdot \sigma \cdot \tau)^2$ *есть тождественная подстановка.*

Введем на множестве $E \times E$ отношение эквивалентности.

Будем говорить, что (a, b, c, d) есть *параллелограмм* множества E, если подстановка σ, меняющая местами a и c, совпадает с подстановкой, меняющей местами b и d.

Тогда $(a, b) \sim (a', b')$, если (a, b, a', b') — параллелограмм.

Непосредственно из определения следует, что

$$[(a, b) \sim (a', b')] \Leftrightarrow [(a, a') \sim (b, b')].$$

С другой стороны, это отношение есть отношение эквивалентности: рефлексивность и симметричность его очевидны; покажем, что оно транзитивно.

---

[1]) Эта формулировка эквивалентна, несмотря на свою кажущуюся ослабленность, свойству 3 переносов.

Предположим, что $(a, b) \sim (a', b')$ и $(a', b') \sim \sim (a'', b'')$. Это значит, что $a' = \rho(b)$, $b' = \rho(a)$ и $a'' = \sigma(b')$, $b'' = \sigma(a')$.

Можно положить $b'' = \tau(a)$, что может быть записано также в виде $a = \tau(b'')$.

Таким образом, получаем равенство $a'' = = \sigma \cdot \rho \cdot \tau \cdot \sigma \cdot \rho(b)$, правая часть которого по приведенному выше следствию есть не что иное как $\tau(b)$; как показывают равенства $b'' = \tau(a)$ и $a'' = \tau(b)$,

$$(a,\ b) \sim (a'',\ b'').$$

Лемма β. *Для всех a, b, c, a', b', c'*

$$[(a,\ b) \sim (a',\ b') \text{ и } (b,\ c) \sim (b',\ c')] \Rightarrow [(a,\ c) \sim (a',\ c')].$$

Действительно, эти отношения эквивалентны соответственно следующим:

$$(a,\ a') \sim (b,\ b'); \quad (b,\ b') \sim (c,\ c'); \quad (a,\ a') \sim (c,\ c'),$$

откуда по транзитивности получаем искомое свойство.

Лемма γ. *Для всех a, b, a' существует единственное b', такое, что $(a, b) \sim (a', b')$.*

Действительно, $b' = \rho(a)$, где ρ — элемент множества $\mathcal{S}$, такой, что $a' = \rho(b)$.

Теперь у нас имеется все необходимое для задания групповой структуры на фактормножестве множества $E \times E$ по этому отношению. Коммутативность этой группы следует из того факта, что в параллелограмме любые две противоположные стороны (пары точек) эквивалентны.

Можно показать, что эта группа изоморфна группе переносов и что эта последняя совпадает с группой подстановок множества E, переводящих любую пару (a, b) в эквивалентную ей пару.

Наконец, можно показать, что для любой точки $\omega \in E$ множество E обладает структурой коммутативной группы с нейтральным элементом ω; группа переносов этого множества есть не что иное как только что определенная группа.

Элементами множества $\mathcal{S}$ являются симметрии $x \to (a - x)$ этой группы. И наоборот, совершенно очевидно, что для любой коммутативной группы G симметрии $x \to (a - x)$ этой группы обладают свойствами 1, 2, 3, выполнение которых требуется от множества $\mathcal{S}$, и что группа переносов, определяемая множеством $\mathcal{S}$, совпадает с группой переносов группы G.

Литература

Здесь указаны лишь некоторые работы, представляющие непосредственный интерес для преподавания.

I. СОЧИНЕНИЯ ЕВКЛИДА И ТРУДЫ, БАЗИРУЮЩИЕСЯ НА ТЕХ ЖЕ ИДЕЯХ

[1]. Евклид, Начала, том I—III, М.—Л., Гостехиздат, 1948—1950.

[2]. Гильберт Д., Основания геометрии, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

[3]. Halsted G. B., Rational Geometry, New York, 1907.

II. АМЕРИКАНСКИЕ РАБОТЫ, БАЗИРУЮЩИЕСЯ НА ПОНЯТИИ РАССТОЯНИЯ *)

[4]. Veblen O., A system of axioms for geometry, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 5 (1904), 343—384.

[5]. Veblen O., The foundations of geometry, ch. I, New York, 1955.

[6]. Moore R. L., Sets of metrical hypothesis for geometry, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 9 (1908), 487—512.

[7]. Forder H. G., The foundations of Euclidean Geometry, London, 1927.

[8]. Birkhoff G. D., A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor, *Ann. of Math.*, 33 (1932).

[9]. Birkhoff G. D., Beatley R., Basic geometry, Manual to basic geometry, New York, 1941.

[10]. Gillam B. E., A new set of postulates for Euclidean geometry, *Revista de Ciencia*, 42 (1940), 869—899.

[11]. Blumenthal L. M., Theory and application of distance geometry, New York, 1953.

[12]. MacLane S., Metric postulates for plane geometry, *American Math. Monthly*, 66 (1959).

[13]*. Moise E. E., Downs F. L., Geometry, Reading (Mass.), 1964. [Готовится русский перевод.]

*) Обзор некоторых из называемых ниже учебников имеется в журнале «Математика в школе», № 2, 1967, стр. 93—96.

[14]*. Henderson K. B., Pingry R. E., Robinson G. A., Modern Geometry, its Structure and Function, New York, 1962.

[15]*. Jurgenson R. C., Donnelly A. J., Doliani M. P., Modern Geometry, Structure and Method, Boston, 1963.

[16]*. School Mathematics Study Group, Geometry I; Geometry II; Geometry with Coordinates, part 1; Geometry with Coordinates, part 2, Yale University press, 1960—1962.

[17]*. Moise E. E., Elementary geometry from an advanced Standpoint, Reading (Mass.), 1964.

[18]*. Jackson S. B., A development of the Jordan curve theorem and the Schönflies theorem for polygons, *Amer. Math. Monthly*, 75, № 9 (1968), 989—998.

III. НЕКОТОРЫЕ БОЛЕЕ ПОЗДНИЕ РАБОТЫ

[19]. Артин Э., Геометрическая алгебра (особенно гл. 4), М., «Наука», 1969.

[20]. Бахман Ф., Построение геометрии на основе понятия симметрии, М., «Наука», 1969.

[21]. Behnke H., Bachmann F., Fladt K., Süss W., Grundlagen der Mathematik, Bd. II, Geometrie, Göttingen, 1960.

[22]. Bouligand G., Accès aux principes de la Géométrie Euclidienne, Paris, 1951.

[23]. Brisac R., Exposé élémetaire des principes de la géométrie Euclidienne, Paris, 1955. (Изложение основано на понятии группы перемещений.)

[24]. Шоке Г., О преподавании элементарной геометрии, сборник «Преподавание математики», М., Учпедгиз, 1960, стр. 65—115. (Изложение основано на понятиях расстояния и складывания по некоторой прямой.)

[25]. Revuz A., Развернутое изложение предыдущей работы (мимиографировано).

[26]. Cartan H., Cours de Math. II (стеклография) (Аксиоматика части планиметрии).

[27]. Kerekjarto B., Les fondements de la géométrie, Budapest, 1955.

[28]. I. C. M. I. Seminar on Modern Teaching of Geometry, Mathematisk Institut, Aarhus Universitet, Elemetar Afdeling n°7, 1960.

[29]*. Dieudonné J., Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Paris, 1964.

[30]*. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. (ред.), Энциклопедия элементарной математики, кн. IV (геометрия), М., Физматгиз, 1963; кн. V (геометрия), М., «Наука», 1966.

[31]*. Кокстер Г. С. М., Введение в геометрию, М., «Наука», 1966.

[32]*. Вейль Г., Симметрия, М., «Наука», 1968.
[33]*. Яглом И. М., Геометрические преобразования 1, М., Гостехиздат, 1955.
[33a]*. Lenz H., Grundlagen der Elementarmathematik, Berlin, 1967.
[34]*. Delessert A., Une Construction de la géométrie elementaire foundée sur la notion de la reflexian, Genève, 1963.

IV. УЧЕБНИКИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ, СОДЕРЖАЩИЕ ИНТЕРЕСНЫЕ ИДЕИ

[35]. Cossart et Théron, Mathematiques 4-e, Bordas.
[36]. Deltheil et Caire, Géométrie, Paris, Baillière.
[37]. Enriques F., Amaldi U., Elementi di Geometria ad uso delle scuola secondarie superiori, Bologne, Zanichelli.
[38]. Rosati C., Benedetti P., Geometria, Rome, Dante Alighieri.
[39]. Severi F., Geometria elementare, Florence, Vallecchi.
[40]. Castelnuovo E., Geometria intuitiva, Florence, La nuova Italia.
[41]. Kenniston E., Jully, Plane Geometry, Ginn and Co., 1946.
[42]. Morse E., Mathematics for high Schools, Geometry, Sale University, New Haven, Connecticut, 1959.
[43]. Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, чч. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1948—1949.
[44]*. Papy G., Mathématique moderne 1; 2 (Nombres réels et vectoriel plan), 3 (Voici Euclide), 6 (Géométrie plane), Bruxelles, 1965—1968.
[45]*. Brumfiel C. F., Eicholz R. E., Shanks M. E., Geometry, Reading Mass., 1962.
[46]*. Queysanne M., Revuz A., Mathématiques 6-e et 5-e, Paris, 1965—66.
[47]*. Queysanne M., Revuz A., Mathématiques 2-e A et 2-e CT, Paris, 1969.
[48]*. Felix L., Géométrie, Paris, 1964.

V*. НЕКОТОРЫЕ РУССКИЕ УЧЕБНИКИ ГЕОМЕТРИИ

[49]. Киселев А. П., Геометрия (планиметрия); Геометрия (стереометрия), М., Учпедгиз, 1962.
[50]. Погорелов А. В., Элементарная геометрия (планиметрия); Элементарная геометрия (стереометрия), М., «Наука», 1969 и 1970.
[51]. Клопский В. М., Скопец З. А., Ягодовский М. И., Геометрия, 9 класс, М., «Просвещение», 1970.
[52]. Семенович А. Ф., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С., Геометрия, 6—8 классы, М., «Просвещение», 1967.
[53]. Болтянский В. Г., Яглом И. М., Преобразования. Векторы, М., «Просвещение», 1964.

VI*. СТАТЬИ В ЖУРНАЛЕ «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

[54]. Колмогоров А. Н., Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе, 1967, № 2, 4—13.

[55]. Колмогоров А. Н., К новым программам по математике, 1968, № 2, 21—22.

[56]. Колмогоров А. Н., Яглом И. М., О содержании школьного курса математики, 1965, № 4, 53—62.

[57]. Яглом И. М., О школьном курсе геометрии, 1968, № 2, 53—58.

[58]. Болтянский В. Г., Яглом И. М., Геометрия в старших классах средней школы, 1969, № 4, 9—21.

[59]. Папи Ж., Геометрия в современном преподавании математики, 1967, № 1, 39—42.

[60]. Серве В., Аксиоматика и элементарная геометрия, 1967, № 6, 45—55.

СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Курсивом в тексте, поясняющем смысл отдельных слов и выражений, выделены имеющиеся в этом словаре термины.

Абелева группа — см. *группа*.

Аддитивная символика — такая система записи формул, относящихся к какой-либо алгебраической системе, при которой имеющаяся в этой алгебраической системе *бинарная операция* обозначается знаком $+$ и называется «сложением».

Алгебраическая операция, определенная в некотором множестве M элементов, — правило, сопоставляющее каждым (упорядоченным!) k элементам множества M (где k фиксировано) какой-то определенный элемент того же множества («результат» операции); по-другому алгебраическую операцию можно определить как отображение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \to \beta$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta \in M$. Алгебраические операции классифицируются по числу k: при $k = 2$ говорят о *бинарной операции* (для обозначения бинарных операций чаще всего используется *аддитивная* или *мультипликативная символика*); при $k = 3$ — о *тернарной операции* и т. д. (При $k = 1$ алгебраическая операция называется унарной; унарной операцией является, например, операция взятия комплексно сопряженного числа в множестве комплексных чисел.)

Антиизоморфизм — такое отображение множества M с заданной на нем *бинарной операцией* на другое множество M' с существующей на нем бинарной операцией, что если $\alpha\beta = \gamma$ (где $\alpha, \beta, \gamma \in M$; мы употребляем здесь *мультипликативную символику*) и $\alpha \to \alpha', \beta \to \beta', \gamma \to \gamma'$, то $\beta'\alpha' = \gamma'$. (Множество M' может и совпадать с M.)

Архимеда аксиома утверждает, что для любых двух отрезков a и b (первый из которых может быть сколь угодно мал, а второй — сколь угодно велик) существует такое натуральное число n, что n-кратный отрезок a больше отрезка b. (Эта аксиома играет основную роль в теории измерения длин отрезков.)

Аффинная структура в множестве M — задание в этом множестве подмножеств, называемых «прямыми» (а также «плоскостей» и т. д., если речь идет об аффинной структуре размерности > 2), превращающее M в *аффинное пространство* соответствующей размерности, в котором выполняются все характеризующие аффинное пространство аксиомы.

Аффинное пространство отличается от евклидова пространства отсутствием «метрики» — расстояний между точками и углов между прямыми. К аффинному пространству можно прийти, отправляясь от различных систем аксиом, например от известной системы аксиом Гильберта евклидова пространства, отказавшись от группы аксиом конгруэнтности. (В случае плоскости наряду с этим приходится ввести одну новую аксиому, связанную со свойствами параллельных прямых.) Простейшая система аксиом аффинного пространства такова: в *векторном пространстве* наряду с векторами вводятся новые объекты, называемые т о ч к а м и; при этом каждым двум точкам A и B отвечает вектор $\overline{AB} = a$; каждой точке A и вектору a отвечает такая точка B, что $\overline{AB} = a$; для каждых трех точек A, B и C имеет место равенство $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ (где 0 — нулевой вектор). (Дополнение этой системы аксиом группой аксиом, связанной со с к а л я р н ы м п р о и з в е д е н и е м векторов, обращает аффинное пространство в евклидово.)

Аффинные преобразования *аффинного пространства* — взаимно однозначные (*биективные*) (точечные) отображения аффинного пространства на себя, которые в случае аффинной плоскости (аффинного пространства размерности 2) можно определить требованием о том, чтобы эти преобразования переводили прямые снова в прямые. (В случае аффинного пространства произвольной размерности n надо потребовать, чтобы плоскости размерности $n-1$ переходили снова в такие же плоскости.) В декартовых (или аффинных) координатах аффинные преобразования записываются линейными уравнениями: $x' = ax + by + e$, $y' = cx + dy + f$, где $ad - bc \neq 0$ (случай плоскости).

Биективное отображение (*биекция*) — взаимно однозначное отображение множества M на множество M' (которое может и совпадать с M), т. е. такое отображение, что каждые два различных элемента множества M отображаются в различные элементы множества M' и каждый элемент множества M' является образом какого-то элемента множества M.

Биекция — см. *биективное отображение.*

Бинарная операция — см. *алгебраическая операция.*

Бинарное отношение — произвольное отношение в множестве M, выделяющее некоторые (упорядоченные) пары элементов из M, считающиеся связанными этим отношением (т. е. подмножество множества $M^2 = M \times M$). (Примеры бинарного отношения: отношение $<$ в множестве чисел или отношение «старший брат» в множестве людей.)

Векторное пространство (оно называется также *линейным пространством*) — множество M элементов, называемых в е к т о р а м и, для которых определены две операции: операция с ложения векторов и операция умножения вектора на число. При этом по сложению векторы должны образовывать *коммутативную группу*, а умножение вектора на число подчиняется следующим аксиомам:

$$1 \cdot a = a, \quad (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a,$$
$$\alpha(a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b, \quad \alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha\beta) \cdot a$$

(здесь $\alpha, \beta \in R$ и $a, b \in M$). Наряду с этим в число аксиом векторного пространства обычно включается аксиома размерности, в случае двумерного векторного пространства (векторной плоскости) формулирующаяся так: существуют два не пропорциональных друг другу вектора (т. е. такие векторы $a \neq 0$ и $b \neq 0$, что не существует числа α, для которого $b = \alpha \cdot a$) и каждые три вектора a, b, c линейно зависимы (т. е. есть такие числа $\alpha, \beta, \gamma \in R$, не все равные нулю, что $\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = 0$, где 0 — нулевой вектор). Для более общего *n-мерного векторного пространства* аксиома размерности формулируется так: существуют n линейно независимых векторов, т. е. такие векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что равенство

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R,$$

имеет место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$; каждые же $n + 1$ векторов линейно зависимы. (Присоединение к системе аксиом векторного пространства дополнительных аксиом, связанных с точками, обращает его в *аффинное пространство*; дополнение же системы аксиом аксиомами скалярного умножения векторов, сопоставляющего каждым двум векторам a и b число $ab \in R$, причем $ab = ba$; $a(b + c) = ab + ac$; $(\alpha a)b = \alpha(ab)$; $a^2 = a \cdot a > 0$ при $a \neq 0$; здесь $a, b, c \in M, \alpha \in R$, обращает аффинное пространство в евклидово пространство.)

Векторная структура на множестве M — структура *векторного пространства* на множестве M, элементы которого в этом случае называются векторами. (Иногда выражение «векторная структура» употребляется в смысле *аффинная структура*.)

Возрастающее отображение — см. *монотонное отображение*.

Выпуклая функция $f(x)$ — такая функция, что $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ для любых x_1 и x_2 из области определения функции f (или из той области, в которой эта функция выпукла). Геометрически неравенство, определяющее выпуклую функцию, означает, что середина $S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ хорды AB, соединяющей две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ графика функции $y = f(x)$, лежит **под** точкой $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ графика, отвечающей значению $\frac{x_1+x_2}{2}$ аргумента функции; отсюда следует, что любая дуга графика выпуклой функции лежит над хордой, соединяющей концы этой дуги.

Гармоническое деление: точки C и D делят отрезок AB гармонически, если $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$ (отрезки направленны!), т. е. точки C и D делят отрезок AB в одном и том же отношении, но одна внешним, а другая — внутренним образом. (Точки пересечения с основанием AB треугольника ABC биссектрисы угла C и биссектрисы внешнего угла при вершине C делят отрезок AB гармонически.)

Группа — такое множество элементов G с определенной в этом множестве *бинарной операцией*, что (мы употребляем здесь *мультипликативную символику*) $(ab)c = a(bc)$, существует такой элемент e (*нейтральный элемент* или единица группы), что $ea = ae = a$ для любого $a \in G$, и для каждого $a \in G$ существует такой элемент a^{-1} группы, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Если, кроме того, $ab = ba$ для любых $a, b \in G$, то G называется *коммутативной* или *абелевой группой*.

Группа преобразований — совокупность преобразований некоторого множества M, т. е. взаимно однозначных (*биективных*) отображений M на себя, такая, что наряду с каждыми двумя преобразованиями g_1 и g_2 в эту совокупность входит и их *произведение* g_2g_1; совокупность содержит тождественное отображение e, переводящее каждый элемент M в себя; наряду с каждым преобразованием g совокупность содержит и обратное ему преобразование g^{-1}, такое, что если g переводит a в b, то g^{-1} переводит b в a. Если для каждых $a, b \in M$ эта группа содержит преобразование, переводящее a в b, то она называется *транзитивной* на множестве M; если такое преобразование единственно — *однотранзитивной* на M.

Движение — *изометрическое отображение метрического пространства* M на себя.

Декартово произведение множеств M и N (оно называется также *прямым произведением* множеств, а иногда и просто *произведением множеств*) состоит в образовании нового множества $M \times N$, элементами которого являются (упорядоченные) пары элементов M и N; таким образом все элементы множества $M \times N$ можно записать в виде (a, b), где $a \in M$, $b \in N$.

Дробно-линейные преобразования евклидова или аффинного пространства (их называют также *проективными преобразованиями*) можно определить как такие преобразования, переводящие некоторую область F пространства в другую область F', что каждая прямая, пересекающая F, переходит снова в прямую (очевидно, пересекающую F'; мы здесь ограничиваемся случаем преобразований плоскости). Во всем (евклидовом или аффинном) пространстве такое преобразование (если только оно не есть *аффинное преобразование*) не является взаимно однозначным (*биективным*); некоторые точки пространства (или плоскости) не имеют при этом образов (т. е. никуда не переходят), а другие — не имеют прообразов. Для того чтобы сделать преобразование биективным, приходится евклидово (аффинное) пространство дополнять фиктивными (т. е. в аффинном пространстве не существующими) «бесконечно удаленными элементами» (точками; в случае плоскости все эти точки принадлежат одной «бесконечно удаленной прямой»). Название «дробно-линейное» присвоено этим преобразованиям потому, что в декартовых (или аффинных) координатах они записываются дробно-линейными функциями: $x' = \dfrac{ax+by+k}{ex+fy+m}$, $y' = \dfrac{cx+dy+l}{ex+fy+m}$ (где числа $a, b, c, d, e, f, k, l, m \in R$ удовлетворяют еще некоторым неравенствам; мы здесь также ограничиваемся случаем плоскости).

Замкнутое множество *топологического пространства* — множество, содержащее предельные точки всех бесконечных последовательностей точек этого множества.

Изометрическое отображение — отображение метрического пространства M на метрическое пространство M' (возможно, совпадающее с M; тогда изометрическое отображение называется также *движением*), сохраняющее расстояние между точками (т. е. такое, что если $A \to A'$ и $B \to B'$, где $A, B \in M$, $A', B' \in M'$, то $d_{AB} = d_{A'B'}$; здесь d_{AB} — расстояние между A и B.

Изоморфизм — такое отображение некоторой алгебраической или геометрической структуры S (множества с заданными в нем определенными отношениями элементов) на аналогичную ей структуру S', при котором связанные определенным отношением элементы S переходят в элементы S', связанные тем же отношением. Так, например, изоморфизм *аффинного пространства* A определяется его аффинным отображением на другое аффинное пространство A', при котором тройка точек $a, b, c \in A$, связанная отношением «коллинеарности» (a, b, c принадлежат одной прямой), переходит в тройку точек $a', b', c' \in A'$, также связанных условием коллинеарности; изоморфизм алгебраической системы M с заданной на ней *бинарной операцией* — это отображение M на такую алгебраическую систему M', что если $\alpha, \beta, \gamma \in M$ связаны отношением $\alpha\beta = \gamma$ (мы употребляем здесь *мультипликативную символику*) и $\alpha \to \alpha'$, $\beta \to \beta'$, $\gamma \to \gamma'$, то $\alpha'\beta' = \gamma'$, и т. д. (см. также *линейное преобразование*).

Импликация — отношение следования высказываний: импликация $p \Rightarrow q$ (где p и q — некоторые высказывания) означает, что «из p следует q».

Инволюция — такое преобразование i некоторого множества M, что $i^2 = i \cdot i = e$ (где *мультипликативная символика* использована для записи *произведения преобразований*; e — тождественное преобразование) или $i^{-1} = i$ (примеры: центральная симметрия, осевая симметрия).

Инъективное отображение (инъекция) — отображение f: $M \to M'$, при котором если $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$ (здесь $x, y \in M$, $f(x), f(y) \in M'$). [Если при этом M отображается на все M', то f — *биекция*.]

Итерация (алгебраической операции или отображения) — многократное повторение (операции, отображения); так, итерацию *бинарной операции* $\alpha\beta$ (мы используем здесь *мультипликативную символику*) образует операция $(\ldots((\alpha\beta)\gamma)\delta \ldots \lambda)\mu$, сопоставляющая новый элемент рассматриваемой алгебраической системы ее элементам $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu$; итерацию преобразования g образует преобразование $g^k = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (k сомножителей).

Кардинальное число — обобщенное «число», указывающее на *мощность множества*: так, например, кардинальное число, которое отвечает *счетному множеству*, обозначается символом $\aleph_0$.

Классы эквивалентности — см. *эквивалентности отношение*.

Коммутативная группа — см. *группа*.

Линейное пространство — см. *векторное пространство*.

Линейное преобразование — *изоморфизм линейного пространства*, т. е. такое отображение линейного или векторного пространства V в другое (или то же самое) линейное (векторное) пространство V', что если $a \to a'$, $b \to b'$, где $a, b \in V$, $a', b' \in V'$, то $a + b \to a' + b'$ и $\alpha \cdot a \to \alpha \cdot a'$ (где $\alpha \in R$ произвольно).

Линейный порядок — такое *отношение порядка* в некотором множестве M, что для любых двух (различных) элементов $a, b \in M$ или $a < b$ или $b > a$.

Метрическое пространство — множество M элементов, называемых точками, в котором каждым двум точкам A и B отвечает число d_{AB}, называемое их расстоянием (так что здесь можно говорить об отображении $M \times M \to R$), и выполняются аксиомы: 1° $d_{AB} = d_{BA}$ (симметричность расстояния); 2° $d_{AA} = 0$; $d_{AB} > 0$ при $A \neq B$ (положительность расстояния); 3° $d_{AB} + d_{BC} \geqslant d_{AC}$ (*неравенство треугольника*).

Монотонное отображение: такое отображение множества M в множество N, где в M и в N определены отношения линейного порядка, что если $a \to a'$ и $b \to b'$, то либо из $a > b$ следует, что $a' > b'$ (в этом случае отображение называется *возрастающим*), либо из $a > b$ следует, что $b' > a'$ (в этом случае отображение называется *убывающим*).

Мощность множества связана с вводимым в множестве множеств *отношением порядка*: если существует *биективное отображение* множества M на часть множества N (возможно, совпадающую с N), но не существует биективного отображения N на часть множества M, то говорят, что мощность множества M меньше мощности множества N; если же существуют и биективное отображение множества M на часть множества N и биективное отображение множества N на часть множества M (в этом последнем случае обязательно существует и биективное отображение M на N), то говорят, что мощности множеств M и N одинаковы (что множества M и N равномощны); в этом последнем случае в отношении понятия мощности множества M и N не различаются. (Таким образом, отношение порядка вводится в *фактормножестве* множества множеств по отношению равномощности.)

Мультипликативная символика — система записи формул, относящихся к алгебраической системе с *бинарной операцией*, при которой эта бинарная операция называется «умножением» и результаты ее применения к элементам α и β алгебраической системы записываются как $\alpha\beta$ или $\alpha \cdot \beta$.

Нейтральный элемент (относительно бинарной операции) — такой элемент ε, что (мы употребляем здесь *мультипликативную символику*) $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$ для всех α.

Неравенство треугольника — см. *метрическое пространство*.

Нормальный делитель *группы* G — подгруппа G_1 (т. е. некоторое множество G_1 элементов группы G, такое, что — если употреблять *мультипликативную символику* — из $g_1, g_2 \in G_1$ следует, что $g_1g_2 \in G_1$; $e \in G_1$; из $g \in G_1$ следует, что $g^{-1} \in G_1$), обладающая тем свойством, что если $g_1 \in G_1$, то и $gg_1g^{-1} \in G_1$ при любом $g \in G$.

Ограничение отображения $M \to M'$ — *отображение* $N \to M'$, где N — часть (подмножество) множества M, определяемое условием: если $a \in N$ и $a \to a'$ при отображении $M \to M'$, то мы считаем, что $a \to a'$ и при отображении $N \to M'$.

Однотранзитивная группа преобразований — см. *группа преобразований*.

Отношение порядка — см. *порядка отношение*.

Отношение эквивалентности — см. *эквивалентности отношение*.

Поле — множество P элементов с определенными в этом множестве двумя *бинарными операциями*, для которых принято использовать *аддитивную* и *мультипликативную символику*, причем по сложению P должно образовывать коммутативную группу с нейтральным элементом 0; по умножению все отличные от 0 элементы P должны также образовывать группу (с другим нейтральным элементом e); связь между сложением и умножением определяется так называемым дистрибутивным законом, в силу которого $a(b + c) = ab + ac$ для любых $a, b, c \in P$. (Из дистрибутивного закона уже следует, например, что $0a = a0 = 0$ для всех $a \in P$.)

Полнота *метрического пространства* определяется требованием существования предела у любой *фундаментальной последовательности* точек этого пространства.

Порядка отношение — *бинарное отношение*, удовлетворяющее условиям асимметричности (см. *симметричность*) и *транзитивности* (т. е. такое, что отношения $a < b$ и $b < a$ не могут иметь места одновременно и из $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$; здесь для обозначения отношения порядка принят стандартно употребляющийся для этой цели символ $<$).

Представление *группы преобразований* G — отображение элементов группы G на некоторое множество G' линейных преобразований, такое, что если $a \to g_a$ и $b \to g_b$ (где $a, b \in G$, $g_a, g_b \in G'$), то $ab \to g_a g_b$.

Проективные преобразования — см. *дробно-линейные преобразования.*

Произведение множеств — см. *декартово произведение.*

Произведение преобразований f и g — результат последовательного осуществления этих преобразований (причем преобразование, которое получится, если сначала произвести преобразование f, а затем—преобразование g, записывается как gf или $g \cdot f$).

Прямая сумма групп G_1 и G_2 — множество, представляющее собой *декартово произведение множеств* G_1 и G_2, причем *бинарная операция* в этом множестве определяется следующим образом: $(g_1, g_2) + (h_1, h_2) = (g_1 + h_1, g_2 + h_2)$, где $g_1, h_1 \in G_1$, $g_2, h_2 \in G_2$; мы употребляем здесь *аддитивную символику.* Полученное таким образом множество с определенной описанным образом бинарной операцией, очевидно, само представляет собой группу (с *нейтральным элементом* $(0_1, 0_2)$, где 0_1 и 0_2 — нейтральные элементы групп G_1 и G_2, и элементом $(-g, -h)$, противоположным элементу (g, h)).

Прямое произведение множеств — см. *декартово произведение.*

Рефлексивность — *бинарное отношение* $a\alpha b$ (где α — символ бинарного отношения) рефлексивно, если $a\alpha a$ для всех a (пример: отношение $\leqslant$ в множестве чисел).

Разбиение множества — подразделение множества M на части (подмножества), при котором каждый элемент M попадает в какую-то из частей и никакие две части не имеют общих элементов.

Симметричность — *бинарное отношение* $a\alpha b$ (где α— символ бинарного отношения) симметрично, если из $a\alpha b$ следует также $b\alpha a$ (пример: отношение «родственник» в множестве людей). Отношение α, такое, что ни для каких a и b отношения $a\alpha b$ и $b\alpha a$ не имеют места одновременно, называется асимметричным.

Сложное отношение четырех точек A, B, C, D прямой — величина $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ (все отрезки — направленные!). (Равенство сложного отношения точек A, B, C, D величине -1 означает, что пара точек (C, D) делит отрезок AB *гармонически*.)

Счетное множество — бесконечное множество, элементы которого могут быть «пересчитаны», т. е. могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами («номерами» элементов).

Тернарная операция — см. *алгебраическая операция.*

Тернарное отношение — правило, выделяющее некоторые (упорядоченные) тройки элементов множества M, про которые говорят, что они связаны этим отношением, т. е. подмножество множества $M^3 = M \times M \times M$. (Пример: отношение $a + b = c$ в множестве чисел, связывающее числа a, b и c.)

Транзитивная группа преобразований — см. *группа преобразований.*

Транзитивность — *бинарное отношение* $a\alpha b$ (где α — символ бинарного отношения) транзитивно, если из $a\alpha b$ и $b\alpha c$ следует, что $a\alpha c$. (Пример: отношение «делится на» в множестве чисел.)

Топологическое пространство — множество M, в котором тем или иным способом определены понятия б е с к о н е ч н о й б л и з о с т и точек и тем самым п р е д е л а точечной последовательности. Наиболее известное определение топологического пространства T таково: T есть множество M с заданной в M с и с т е м о й о к р е с т н о с т е й — системой $\mathfrak{S}$ таких подмножеств U_α, что пустое множество $\varnothing$ и само пространство M принадлежат системе $\mathfrak{S}$ и объединение $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) числа окрестностей и пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ любого конечного числа окрестностей сами принадлежат $\mathfrak{S}$. При этом точка a называется п р е д е л о м последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ точек, если каждой окрестности точки a (т. е. каждому множеству нашей системы $\mathfrak{S}$, содержащему точку a) принадлежит бесконечно много точек нашей последовательности. (Можно показать, что любое *метрическое пространство* является топологическим пространством, за систему окрестностей которого можно принять систему так называемых открытых множеств — ее можно описать как систему всевозможных «открытых шаров» — множеств таких точек M, что $d_{OM} < \rho$, где O и ρ фиксированы, — а также всевозможных объединений и пересечений «открытых шаров».)

Топология — структура *топологического пространства* на множестве M.

Убывающее отображение — см. *монотонное отображение*.

Устойчивость относительно преобразований: множество F устойчиво относительно совокупности S преобразований, если каждое преобразование из S переводит F в себя.

Факторгруппа *группы* G по *нормальному делителю* H определяется так: в группе G бинарное отношение «$g_1 g_2^{-1} \in H$», связывающее элементы g и h группы, является *отношением эквивалентности* (это вытекает из того, что H — нормальный делитель); в *фактормножество* множества G по этому отношению эквивалентности можно ввести групповую операцию следующим образом: «произведением» G_1G_2 классов G_1 и G_2 эквивалентности, содержащих элементы g_1 и g_2, называют класс эквивалентиости, содержащий элемент g_1g_2 (мы используем здесь *мультипликативную символику*). Можно показать, что это определение не зависит от выбора «представителей» g_1 и g_2 наших классов эквивалентности G_1 и G_2 и что фактормножество множества G по нашему отношению эквивалентности с так определенной групповой операцией образует *группу* (*нейтральным элементом* которой служит сам нормальный делитель H).

Фактормножеством множества M по определенному в M *отношению эквивалентности* α называют множество *классов эквивалентности* множества M, определенных отношением α. (Пример: фактормножество множества прямых по отношению параллельности есть множество направлений.)

Фундаментальная последовательность точек *метрического пространства* — такая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ точек, что для каждого (сколь угодно малого!) числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что $d_{a_p a_q} < \varepsilon$, коль скоро $p > N$ и $q > N$.

Эквивалентности отношение — такое бинарное *отношение* ε в множестве M, которое удовлетворяет условиям *рефлексивности* ($a\varepsilon a$ для всех a), *симметричности* (из $a\varepsilon b$ следует $b\varepsilon a$) и *транзитивности* (из $a\varepsilon b$ и $b\varepsilon c$ следует $a\varepsilon c$). Можно доказать, что в этом случае существует *разбиение* множества M на классы элементов, попарно связанных между собой отношением ε; эти классы элементов называют *классами эквивалентности*. (Пример: отношение «a и b дают при делении на 5 один и тот же остаток», связывающее пары a, b целых чисел, есть отношение эквивалентности; что представляют собой в этом случае классы эквивалентности?)

Эквивалентность высказываний: высказывания p и q называются эквивалентными (что записывается так: $p \Leftrightarrow q$), если из каждого из них следует второе (т. е. если они либо оба истинны, либо оба ложны).

n-мерное пространство — см. *векторное пространство*.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

C — множество комплексных чисел
N — множество натуральных (целых положительных) чисел
Q — множество рациональных чисел
Q^* — множество рациональных чисел, отличных от нуля
R — множество действительных чисел
R^* — множество действительных чисел, отличных от нуля
R_+^* — множество положительных действительных чисел
Z — множество целых чисел
inf — нижняя грань множества действительных чисел (наименьшее число, если оно существует)
sup — верхняя грань множества действительных чисел (наибольшее число, если оно существует)
$\{\ldots\}$ — символ множества ($\{a, b, c, \ldots, k\}$ — множество из элементов $a, b, c, \ldots, k$)
$\varnothing$ — пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента)
$\in$ — знак принадлежности ($x \in M$ — «x есть элемент множества M»)
$\subset$ — знак включения ($A \subset B$ — «множество A целиком принадлежит множеству B»)
$\cup$ — символ объединения ($A \cup B$ — «объединение множеств A и B»)
$\cap$ — символ пересечения ($A \cap B$ — «общая часть или пересечение множеств A и B»)
$\setminus$ — символ разности множеств ($A \setminus B$ — «разность множеств A и B», т. е. множество всех тех элементов A, которые не принадлежат B).
$\Rightarrow$ — знак следования ($a \Rightarrow b$ — «из a следует b»)
$\Leftrightarrow$ — знак равносильности ($a \Leftrightarrow b$ — «a равносильно b»)
$\to$ — символ отображения ($x \to y$ — «x переходит в y»)
$\circ$ — символ произведения (композиции) отображений ($b \circ a$ — произведение отображений a и b, сначала a, потом b)
$\times$ — прямое (декартово) произведение множеств ($A \times B$ — декартово произведение множеств A и B)
$]a, b[$ — интервал (множество таких x, что $a < x < b$)
$[a, b[$ — полуинтервал (множество таких x, что $a \leqslant x < b$)
$[a, b]$ — сегмент (множество таких x, что $a \leqslant x \leqslant b$).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Каждый термин сопровождается номером соответствующего пункта

Оглавление

Г. ШОКЕ

Геометрия

Редакторы *А. А. Бряндинская, Н. И. Плужникова*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Т. В. Чечик*

Сдано в производство 30/IX 1969 г.
Подписано к печати 18/III 1970 г.
Бумага № 1 $84 \times 108^1/_{32}$=3,75 бум. л. Усл. печ. л. 12,60
Уч.-изд. л. 10,75 Изд. № 1/5114
Цена 70 коп. Зак. 323.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

70 к.

Евклид положил в основу своей геометрии на плоскости признаки равенства треугольников. Двадцать три века спустя математики определяют плоскость как аффинное пространство размерности 2 с определенным в нем скалярным произведением. Я полагал, что нашим детям понадобится изложение геометрии, которое, как и изложение Евклида, исходит из наглядных представлений, но которое даст им возможность очень быстро перейти к использованию гибких и плодотворных методов алгебры.

Эта книга содержит, таким образом, аксиоматику геометрии, основанную на понятиях параллельности, перпендикулярности и расстояния, и притом в виде, который позволяет естественным образом быстро перейти к алгебраической структуре плоскости и пространства.

Густав Шоке